Beknopte uitwerking tentamen Kansrekening II, 29 oktober 1998

1. (i). $f_X(x)=1/b$ voor $x\in(0,b)$, dus $F(x)=\int_0^x 1/b\,dx = x/b$ voor $x\in(0,b)$.

(ii). Voor $x\in(0,b)$: $F_{M_n}(x)=\mathbb{P}(X_1\le x;\cdots;X_n\le x)=\mathbb{P}(X_1\le x)\cdots\mathbb{P}(X_n\le x)=F(x)^n$,

dus $g_n(x)=F'_{M_n}(x)=n\,F(x)^{n-1}F'(x)=n\,b^{-n}x^{n-1}$.

(iii). $\mathbb{E}M_n=\int_0^b x\cdot n b^{-n}x^{n-1}\,dx=\frac{n}{n+1}b$, $\mathbb{E}M_n^2=\int_0^b x^2\cdot n b^{-n}x^{n-1}\,dx=\frac{n}{n+2}b^2$,

dus $\mathrm{Var}\,M_n=\frac{n}{n+2}b^2-\left(\frac{n}{n+1}b\right)^2=\frac{n}{(n+1)^2(n+2)}b^2$.

(iv). $\mathbb{E}T_n=\frac{n+1}{n}\mathbb{E}M_n=b$. Omdat $\mathrm{Var}\,T_n=\left(\frac{n+1}{n}\right)^2\mathrm{Var}\,M_n=\frac{1}{n(n+2)}b^2$, is volgens Chebyshev: $\mathbb{P}(|T_n-b|\ge a)=\mathbb{P}(|T_n-\mathbb{E}T_n|\ge a)\le\frac{1}{a^2}\mathrm{Var}\,T_n=\frac{b^2}{a^2}\frac{1}{n(n+2)}\to 0$.

2. (i). X geom$(\frac16)$, Y geom$(\frac16)$. Bijv. $\mathbb{P}(X=1;Y=1)=0\ne\mathbb{P}(X=1)\,\mathbb{P}(Y=1)$: X en Y áfh.

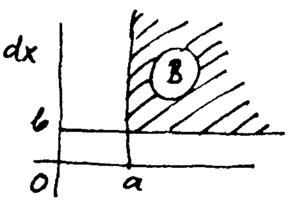
(ii). U = # worpen nodig voor 5 of 6 : geom$(\frac13)$.

(iii). $\{U=k;D=m\}=\{X=k;Y=k+m\}\cup\{Y=k;X=k+m\}=\{(k-1)\times(1,2,3\text{ of }4)$, dán 5 ; vervolgens $(m-1)\times(1,2,3,4\text{ of }5)$, dán 6$\}\cup\{\cdots(\text{verw. 5 en 6})\cdots\}$, dus : $\mathbb{P}(U=k;D=m)=$
$=2\cdot(\frac23)^{k-1}\cdot\frac16\cdot(\frac56)^{m-1}\cdot\frac16=\mathbb{P}(U=k)\,\mathbb{P}(X=m)$. Gevolg : $\mathbb{P}(D=m)=\sum_k\mathbb{P}(U=k)\,\mathbb{P}(X=m)=$
$=\mathbb{P}(X=m)$: $D\overset{d}{=}X$, en dus : $\mathbb{P}(U=k;D=m)=\mathbb{P}(U=k)\,\mathbb{P}(D=m)$: U en D onafh.

(iv). $U+V=2U+D$, dus $\mathrm{Var}(U+V)=4\,\mathrm{Var}\,U+\mathrm{Var}\,D+4\,\mathrm{Cov}(U,D)=4\cdot6+30+4\cdot0=54$.

(v). Daar $X+Y=U+V$, is $\mathrm{Cov}(X,Y)=\frac12\{\mathrm{Var}(X+Y)-\mathrm{Var}\,X-\mathrm{Var}\,Y\}=\frac12\{54-30-30\}=-3$.

3. (i). $\mathbb{P}(X>a;Y>b)=\mathbb{P}((X,Y)\in B)=\int_B f(x,y)\,dx\,dy=\int_a^\infty\left(\int_b^\infty xe^{-x(y+1)}dy\right)dx$
$=\int_a^\infty e^{-xb}e^{-x}\,dx=\frac{1}{1+b}e^{-a(1+b)}$.

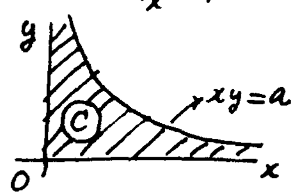


(ii). $\mathbb{P}(X>a)=\mathbb{P}(X>a;Y>0)=e^{-a}$, $\mathbb{P}(Y>b)=\mathbb{P}(X>0;Y>b)=\frac{1}{1+b}$,

dus voor $a>0,\ b>0$: $\mathbb{P}(X>a;Y>b)\ne\mathbb{P}(X>a)\,\mathbb{P}(Y>b)$: X en Y áfhankelijk.

(iii). Daar $\mathbb{P}(X>a)=e^{-a}$, is X exp(1) verdeeld. Aldus voor $y>0$: $f_Y(y|X=x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=$
$=xe^{-xy}$: exp$(\lambda=x)$ verd., dus $(Y|X=x)=\frac1x X$.

(iv). Voor $a>0$: $\mathbb{P}(XY\le a)=\mathbb{P}((X,Y)\in C)=\int_C f(x,y)\,dx\,dy=$
$=\int_0^\infty\left(\int_0^{a/x}xe^{-x(y+1)}dy\right)dx=\int_0^\infty(1-e^{-x\cdot a/x})\,e^{-x}\,dx=1-e^{-a}$.



4. (i). Voor $n\in\mathbb{Z}_+$: $\mathbb{P}(X+Y=n)=\sum_{k=0}^n\mathbb{P}(X=k;Y=n-k)=\sum_{k=0}^n\mathbb{P}(X=k)\,\mathbb{P}(Y=n-k)=$
$=\sum_{k=0}^n\frac{(\lambda s)^k}{k!}e^{-\lambda s}\frac{(\lambda t)^{n-k}}{(n-k)!}e^{-\lambda t}=\frac{1}{n!}e^{-\lambda(s+t)}\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}(\lambda s)^k(\lambda t)^{n-k}=\frac{1}{n!}e^{-\lambda(s+t)}(\lambda s+\lambda t)^n$.

(ii). Voor $k\in\{0,\dots,n\}$: $\mathbb{P}(X=k|X+Y=n)=\mathbb{P}(X=k)\,\mathbb{P}(Y=n-k)\,/\,\mathbb{P}(X+Y=n)=$
$=\frac{(\lambda s)^k}{k!}e^{-\lambda s}\frac{(\lambda t)^{n-k}}{(n-k)!}e^{-\lambda t}\Big/\left(\frac{(\lambda(s+t))^n}{n!}e^{-\lambda(s+t)}\right)=\binom{n}{k}\left(\frac{s}{s+t}\right)^k\left(\frac{t}{s+t}\right)^{n-k}$.

(iii). Daar $n=100$ en $t=9s$, is $p=\frac{s}{s+t}=\frac{1}{10}$, dus $\mu=np=10$ en $\sigma^2=np(1-p)=9$.

(iv). Neem Z normaal$(10,9)$, dan : $\mathbb{P}(X\le5\,|\,X+Y=100)\approx\mathbb{P}(Z\le5{,}5)=\Phi(-1{,}5)=0{,}0668$.