

Hertentamen Kansrekening 1 voor BWI

18 februari 2009, 18.30–20.30

Dit tentamen bestaat uit 4 opgaven. Er zijn in totaal 36 punten plus 2 bonuspunten te behalen (cijfer = $\frac{1}{4}(\text{aantal punten})+1$). Het gebruik van een eenvoudige, niet-programmeerbare rekenmachine is toegestaan. Na correctie liggen de gemaakte tentamens ter inzage op het onderwijsbureau.

1. Een pak speelkaarten bevat 52 kaarten van vier verschillende kleuren: Harten, Ruiten, Schoppen en Klaveren. Er zijn 13 kaarten van elke kleur. Nadine trekt *zonder* terugleggen één voor één 4 willekeurige kaarten uit dit pak. Zij is geïnteresseerd in de volgende gebeurtenissen:

$A = \{\text{Alle getrokken kaarten behoren tot dezelfde kleur}\}$

$B = \{\text{Tenminste één van de 4 kleuren wordt niet getrokken}\}$

Laat de kaarten genummerd zijn: Harten van 1 t/m 13, Ruiten van 14 t/m 26, Schoppen van 27 t/m 39 en Klaveren van 40 t/m 52.

- (a) [3 punten] Stel een geschikte uitkomstenruimte S op voor dit experiment, zodanig dat alle uitkomsten dezelfde kans hebben, en geef $\#S$.
- (b) [4 punten] Beschrijf de gebeurtenis A als deelverzameling van S , bereken $\#A$ en bepaal hiermee $P(A)$.
- (c) [4 punten] Bereken $P(B)$.

2. De beruchte Prof. dr. L. Stougie heeft het tentamen Inleiding Besliskunde II in elkaar gezet. Het is bekend dat elk jaar 60% van de deelnemers aan dit tentamen uit studenten BWI bestaat. Na het tentamen blijkt dat 90% van degenen die het tentamen met een voldoende hebben afgesloten BWI studeert. Het is ook bekend dat slechts een kwart van de BWI-ers dit tentamen met een voldoende heeft afgesloten.

- (a) [4 punten] Toon aan dat de kans dat een willekeurig gekozen deelnemer aan het tentamen een voldoende heeft gehaald gelijk is aan $1/6$.
- (b) [4 punten] Bereken de conditionele kans dat een willekeurig gekozen deelnemer aan het tentamen *geen* BWI-er is, als gegeven is dat deze student *geen* voldoende heeft gehaald.

3. Beschouw zes genummerde vazen. Elke vaas bevat 6 ballen: in vaas i zitten precies i rode ballen en $6 - i$ blauwe. Beschouw nu het volgende experiment. Claudia gooit één keer met een onzuivere dobbelsteen: met kans $i/21$ gooit zij i ogen, $i \in \{1, 2, \dots, 6\}$. Vervolgens trekt zij één voor één, zonder terugleggen, twee ballen uit de vaas met het nummer dat correspondeert met het aantal ogen dat zij gegooit heeft. Als beide getrokken ballen rood zijn, wint zij een prijs. Laat X het aantal ogen zijn dat Claudia gooit, en introduceer

$$A_i = \{X = i\} = \{\text{Claudia gooit } i \text{ ogen}\} \quad i \in \{1, 2, \dots, 6\}$$

$$W = \{\text{Claudia trekt twee rode ballen en wint een prijs}\}$$

- (a) [4 punten] Bereken $E\left(\frac{1}{X}\right)$ en $\text{Var}\left(\frac{1}{X}\right)$.
- (b) [4 punten] Bepaal $P(W \mid A_i)$ en toon vervolgens aan dat de kans dat Claudia een prijs wint, dus $P(W)$, gelijk is aan $5/9$.
- (c) [3 punten] Bereken de conditionele kans dat de twee getrokken ballen uit vaas 3 komen, als gegeven is dat Claudia *geen* prijs heeft gewonnen.

4. Lysanne gooit herhaaldelijk met een zuivere dobbelsteen totdat ze voor de tweede keer een 6 gooit. Laat X het aantal worpen zijn dat ze hiervoor nodig heeft. Lysanne is geïnteresseerd in het aantal keer dat zij een 1 gooit. Dat aantal noemen we Y .

- (a) [3 punten] Welke verdeling heeft X en met welke parameter(s)? Geef de waardenverzameling, de kansmassafunctie en de verwachting van X .

We kunnen de uitkomstenruimte voor dit experiment partitioneren in de gebeurtenissen $A_n = \{X = n\}$ voor $n = 2, 3, \dots$. Dus A_n is de gebeurtenis dat Lysanne n keer gooit en de n -de worp de tweede 6 is die ze gooit.

- (b) [3 punten] Bepaal $P(\{Y = k\} \cap A_n)$ voor willekeurige $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$ en $n \in \{k + 2, k + 3, \dots\}$.
- (c) [2 bonuspunten] Bereken nu $P(Y = k)$ met de wet van totale kans. Gebruik daarvoor de formule

$$\sum_{n=r}^{\infty} \binom{n-1}{r-1} a^{n-r} = \frac{1}{(1-a)^r}$$