

Tentamen Kansrekening 1 voor BWI

15 december 2008, 8.45–10.45

Dit tentamen bestaat uit 4 opgaven. Er zijn in totaal 36 punten te behalen (tentamencijfer = $\frac{1}{4}(\text{aantal punten})+1$). Het gebruik van een eenvoudige, niet-programmeerbare rekenmachine is toegestaan. Na correctie liggen de gemaakte tentamens ter inzage op het onderwijsbureau.

1. Nick trekt met terugleggen acht keer een kaart uit een pak van 52 gewone speelkaarten. Een klaveren of schoppen kaart noemen we “zwart”, een ruiten of harten kaart “rood”. Introduceer de volgende gebeurtenissen:

$A = \{\text{Zowel de eerste als de achtste getrokken kaart is een Heer}\}$

$B = \{\text{Er worden precies drie Azen getrokken}\}$

$C = \{\text{De getrokken kaarten zijn afwisselend rood en zwart}\}$

(a) [2 punten] Laat de kaarten genummerd zijn van 1 t/m 52. Stel een uitkomstenruimte S op voor dit experiment, zodanig dat alle uitkomsten dezelfde kans hebben, en geef $\#S$.

(b) [3 punten] Stel dat de kaarten 1 t/m 4 de vier Heren zijn. Beschrijf de gebeurtenis A als deelverzameling van S , geef $\#A$ en bereken hiermee $P(A)$.

(c) [4 punten] Bereken $P(B)$ en $P(C)$.

Stel dat Nick net zo lang door blijft gaan met het één voor één trekken van kaarten (met terugleggen) totdat hij een Aas of de klaveren Boer trekt.

(d) [4 punten] Bereken de kans dat hij de klaveren Boer eerder trekt dan een Aas. *Hint*: Een optie is om de gezochte gebeurtenis uit te drukken in de gebeurtenissen T_i dat de eerste $i - 1$ kaarten die Nick trekt geen Aas of klaveren Boer zijn, en de i -de kaart de klaveren Boer is.

2. [4 punten] Artash beschikt over een onzuivere dobbelsteen: met kans $\frac{i}{21}$ gooit hij i ogen, $i \in \{1, 2, \dots, 6\}$. Hij gooit één keer met de dobbelsteen. Laat X het aantal ogen zijn dat hij gooit. Bereken $\text{Var}(3X)$. Hierbij mag je de volgende formules gebruiken:

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \qquad \sum_{i=1}^n i^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 \qquad (1)$$

3. In een fabriek staan drie productielijnen voor computerchips. Lijn 1 en lijn 2 produceren elk 500 chips per dag. Een chip die van lijn 1 rolt is defect met een kans van 1%, terwijl deze kans 4% is voor een chip die van lijn 2 rolt. Lijn 3 produceert maar liefst 1000 chips op een dag, maar zo'n chip is met een kans van 2,5% defect. Alle chips die op één dag worden gemaakt belanden in een container. Hieruit kiezen we een willekeurige chip.

(a) [4 punten] Bereken de conditionele kans dat de gekozen chip gemaakt is in de productielijn 3, als gegeven is dat de chip *niet* defect is.

(b) [3 punten] Ga voor de productielijn 3 na of de gebeurtenis dat de chip defect is afhankelijk is van de gebeurtenis dat de chip in lijn 3 werd geproduceerd. Doe hetzelfde voor productielijn 2 in plaats van lijn 3.

4. In een vaas zitten n blauwe ballen die genummerd zijn van 1 t/m n , plus een rode bal. Daniël trekt, met terugleggen, herhaaldelijk één willekeurige bal uit de vaas, net zo lang totdat hij voor het eerst de rode bal pakt. Het aantal keer dat Daniël een bal trekt noemen we N . Introduceer

$$E_i = \{\text{Blauwe bal } i \text{ wordt niet getrokken}\} \quad i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

$$A = \{\text{Elke blauwe bal wordt ten minste één keer getrokken}\}$$

(a) [3 punten] Hoe is N verdeeld en met welke parameter(s)? Geef de kansmassafunctie, verwachting en variantie van N .

(b) [3 punten] Bekijk de gebeurtenis $E_1 \cap \{N = k\}$ voor $k \in \{1, 2, \dots\}$. Als deze gebeurtenis optreedt, hoeveel mogelijkheden zijn er dan voor de ballen die Daniël trekt in elk van de eerste $k - 1$ trekkingen? Bepaal nu $P(E_1 \cap \{N = k\})$ en bereken $P(E_1)$. NB: er zijn in totaal $n + 1$ ballen!

(c) [2 punten] Bewijs met eenzelfde redenering dat

$$P(E_1 \cap \dots \cap E_m) = \frac{1}{m+1} \quad \text{voor alle } m \in \{1, 2, \dots, n\} \quad (2)$$

(d) [4 punten] Er geldt $A^c = \bigcup_{i=1}^n E_i$. Bereken nu $P(A)$. Gebruik hiervoor formule (2) en de identiteit $\sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} (-1)^i = 0$. Als dit niet meteen lukt voor algemene n , bereken $P(A)$ dan eerst voor $n = 3$ [voor 2 v/d 4 punten].