

Tentamen Kansrekening I voor BWI

7 juni 2006, 18.30-21.15



- Dit tentamen bestaat uit 6 opgaven en een bijlage. Er zijn in totaal 16 onderdelen, al deze onderdelen tellen even zwaar mee bij de beoordeling.
- Geef een duidelijke toelichting bij je antwoorden.
- Het gebruik van een 'eenvoudige' rekenmachine is toegestaan; deze rekenmachine mag geen grafische en/of programmeerbare rekenmachine zijn.
- Na correctie liggen de tentamens ter inzage bij het onderwijsbureau.
- Veel succes!

1. Ik heb een vaas met tien ballen die genummerd zijn van 1 tot en met 10. Ik trek herhaaldelijk, zonder terugleggen, een willekeurige bal uit de vaas en leg de ballen die ik trek op een rijtje. Ik ga door tot er geen ballen meer in de vaas zitten en ik een rijtje van 10 ballen voor me heb liggen.

(a) Bereken de kans dat de tweede tot en met de zesde bal die ik trek allemaal een even nummer hebben.

(b) Bereken de kans dat ergens in het rijtje de ballen met de nummers 1, 2 en 3 achter elkaar liggen (in deze volgorde).

(c) Laat A de gebeurtenis zijn dat de eerste bal die ik trek een even nummer heeft en B de gebeurtenis dat de tweede bal die ik trek nummer 7 heeft. Zijn A en B onafhankelijk?

2. Ik heb twee dozen, die allebei 10 gloeilampen bevatten. In de ene doos zit één defecte lamp, in de andere doos zitten drie defecte lampen. Ik kies een willekeurige doos en haal daar een willekeurige lamp uit. Ik stop deze lamp niet terug in de doos. Vervolgens haal ik uit *dezelfde* doos nog een willekeurige lamp. Schrijf A voor de gebeurtenis dat de eerste lamp die ik pak defect is, B voor de gebeurtenis dat de tweede lamp defect is en C voor de gebeurtenis dat ik de doos met de drie defecte lampen heb gekozen.

(a) Bereken $P(C|A)$.

(b) Bereken $P(B)$.

3. Drie personen A , B en C gaan vanaf vandaag elke dag een wedstrijd hardlopen. Zij kijken steeds wie als eerste, als tweede en als derde eindigt (het is niet mogelijk dat er gelijk geëindigd wordt). Neem aan dat iedere mogelijke uitslag van een wedstrijd even waarschijnlijk is en dat de uitslagen van afzonderlijke wedstrijden onafhankelijk van elkaar zijn.

(a) Laat X het aantal keren zijn dat A wint bij de komende 20 wedstrijden. Geef de kansmassafunctie en de verwachting van X . Hoe heet de verdeling van X ?

(b) Laat Y het aantal wedstrijden zijn dat gespeeld is tot en met de eerste keer dat B harder loopt dan A . Geef de kansmassafunctie en de verwachting van Y . Hoe heet de verdeling van Y ?

(c) Bereken de kans dat de achtste wedstrijd de tweede wedstrijd is die B gewonnen heeft.

4. Laat X een continue stochast zijn met dichtheidsfunctie

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{c}{(x-1)^5} & \text{als } x \geq 2, \\ 0 & \text{elders.} \end{cases}$$

Hierbij is c een nog te berekenen constante.

- (a) Bereken c .
- (b) Bereken de verwachting van X .
- (c) Bereken de cumulatieve verdelingsfunctie van X .
- (d) Bereken de dichtheidsfunctie van de stochast $Y = \log(X - 1)$, met $\log(X - 1)$ wordt de natuurlijke logaritme van $(X - 1)$ bedoeld.

5. Laat X en Y continue stochasten zijn met gezamenlijke dichtheidsfunctie

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 6e^{-5x}e^{3y} & \text{als } x \geq 0 \text{ en } y \leq x, \\ 0 & \text{elders.} \end{cases}$$

- (a) Laat zien dat de marginale dichtheidsfunctie van Y gegeven wordt door

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{6}{5}e^{-2y} & \text{als } y \geq 0, \\ \frac{6}{5}e^{3y} & \text{als } y < 0. \end{cases}$$

- (b) Zijn X en Y onafhankelijk? Verklaar je antwoord.
- (c) Bereken $P(X > 0, Y < 0)$.

6. Bij deze opgave heb je de bijlage nodig. Laat X en Y onafhankelijke continue stochasten zijn. Beide stochasten zijn normaal verdeeld met verwachting 3 en variantie 4. Bereken $P(XY > 0)$.

[illegible]