

Faculteit der Exacte Wetenschappen

Tentamen Metrische Topologie

Afdeling Wiskunde

najaar 2004

Vrije Universiteit

Duur: 3 uur

1. A en B zijn niet-lege, begrensde deelverzamelingen van $\mathbb{R}$.

Bewijs of weerleg:

$$(i) \quad A \triangle B \neq \emptyset \implies \inf(A \triangle B) < \sup(A \triangle B).$$

$$(ii) \quad A \triangle B \neq \emptyset \implies \inf(A \cup B) < \sup(A \cup B).$$

(Met $A \triangle B$ wordt het symmetrisch verschil

$(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ bedoeld.)

2. Zij d de euclidische metriek op $\mathbb{R}$.

Zij $d_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven door:

$$d_1(x, y) = 2d(x, y) \quad \text{als } xy \neq 0;$$

$$d_1(x, 0) = d_1(0, x) = 2d(x, 0) + 2 \quad \text{als } x \neq 0;$$

$$d_1(0, 0) = 0.$$

a) Toon aan dat d_1 een metriek op $\mathbb{R}$ is.

b) Beschrijf de volgende (open) bollen:

$$B_{d_1}(10, 2); \quad B_{d_1}(0, 2); \quad B_{d_1}(1, 4).$$

(Antwoorden volstaan.)

- c) De rijen $(u_n)_n$ en $(v_n)_n$ in $(\mathbb{R}, d_1)$ zijn gegeven door:

$$u_n = \sin\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{en} \quad v_n = \cos\left(\frac{1}{n}\right), \quad (n \in \mathbb{N}).$$

(i) Onderzoek of $(u_n)_n$ een Cauchy-rij is in $(\mathbb{R}, d_1)$.

Onderzoek of $(u_n)_n$ convergent is in $(\mathbb{R}, d_1)$.

(ii) Dezelfde vragen als onder (i), maar nu voor de rij $(v_n)_n$.

- d) Ga na of $(\mathbb{R}, d_1)$ samenhangend/compact/volledig is.

- e) Zij $f : (\mathbb{R}, d_1) \rightarrow (\mathbb{R}, d)$ gegeven door

$$f(x) = x.$$

Ga na of f continu/uniform continu is.

- f) Zij $g : (\mathbb{R}, d) \rightarrow (\mathbb{R}, d_1)$ gegeven door

$$g(x) = x + 2.$$

Ga na of g continu/uniform continu is.

Z.O.Z.

3. Zij (X, d) een samenhangende en compacte metrische ruimte en $p \neq q$ ($p, q \in X$).
- (i) Licht toe dat de afbeelding $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven door $f(x) := d(x, p) - d(x, q)$ continu is.
 - (ii) Zij $E := \{x \in X \mid d(x, p) = d(x, q)\}$. Toon aan: $E \neq \emptyset$ en E gesloten in (X, d) .
 - (iii) Toon aan: $X \setminus E$ is onsaamenhangend.
 - (iv) Licht toe dat E compact is en dat $X \setminus E$ niet compact is.

4. Zij X compact en $f : X \rightarrow Y$ continu.

- a) Toon aan:
als $(x_n)_n$ een Cauchy-rij is in X , dan is $(f(x_n))_n$ een Cauchy-rij in Y .
- b) Toon aan:
als $(y_n)_n$ een rij is in $f[X]$ zó dat $y_n \rightarrow y \in Y$, dan is er een $x \in X : y = f(x)$.
- c) Geef voorbeelden waaruit blijkt dat in bovenstaande beweringen onder a) én b) de compactheid van X noodzakelijk is.

5. Onderzoek in $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ elk van de onderstaande functie-rijen op convergentie:

- (i) $(f_n)_n$ met $f_n(x) = \frac{x^{2n}}{x^{2n} + 2}$;
- (ii) $(g_n)_n$ met $g_n(x) = \frac{n \cos x}{n + 1}$;
- (iii) $(h_n)_n$ met $h_n(x) = \sin\left(\frac{x}{n}\right)$.

Normering:

1 : (i) 2	2 : a) 3	3 : (i) 2	4 : a) 3	5 : 7
(ii) 2	b) 3	(ii) 3	b) 2	
	c) 3	(iii) 2	c) 4	
	d) 3	(iv) 2		
	e) 2			
	f) 2			
4	16	9	9	7

$$\text{Eindcijfer} = \frac{\# \text{ punten}}{5} + 1$$