



1. Zij $A \subset \mathbb{R}$ en $A \neq \emptyset$. Zij $-A := \{-x \mid x \in A\}$.

a) Bewijs of weerleg:

A naar boven begrensd $\implies -A$ naar boven begrensd.

b) Zij A naar beneden begrensd. Toon dan aan:

- (i) $-A$ is naar boven begrensd;
- (ii) $\sup(-A) = -\inf(A)$.

2. Zij $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ de verzameling der natuurlijke getallen.

Zij X de verzameling van alle eindige deelverzamelingen van $\mathbb{N}$
(m.a.w. $A \in X \iff A \subset \mathbb{N}$ en $\#A \in \mathbb{N} \cup \{0\}$).

De functie $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ wordt als volgt gedefinieerd:

$$d(A, B) := \#(A \triangle B)$$

(waarbij met $A \triangle B$ het symmetrisch verschil

$$(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

bedoeld wordt).

(i) Zij $A = \emptyset$, $B = \{1\}$, $C = \{2\}$ en $D = \{1, 2\}$.

Bereken: $d(A, B)$, $d(B, C)$, $d(C, D)$ en $d(D, D)$. [De 4 antwoorden volstaan.]

(ii) Toon aan dat d een metriek op X is.

(iii) Beschrijf de open bollen $B_d(\{7\}, 1)$ en $B_d(\{7\}, 2)$. [De antwoorden volstaan.]

(iv) Ga na of (X, d) samenhangend/compact/volledig is.

3. Zij X samenhangend, Y eindig en $f : X \rightarrow Y$ continu.

Toon aan: f is constant.

Z.O.Z.

4. $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$ zijn voorzien van de euclidische metriek. Zij C de cirkel in $\mathbb{R}^2$ gegeven door

$$C := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 100\}.$$

Zij K de cilinder in $\mathbb{R}^3$ gegeven door:

$$K := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 100, z \in [0, 10]\}.$$

Zij $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ de functie gegeven door

$$f(x, y, z) = e^x - xe^{2y} + \arctan x + \ln(z + 2).$$

- (i) Toon aan dat C samenhangend is.
- (ii) Toon vervolgens aan dat K óók samenhangend is.
- (iii) Licht toe dat f op K een nulpunt heeft.
- (iv) Toon aan dat f op K een maximum en een minimum aanneemt.

5. Zij $f(x, y) = \frac{\cos(x^2 + y^2 + \pi)}{x^2 + y^2 + 1}, ((x, y) \in \mathbb{R}^2).$

- (i) Licht toe dat f continu is.
- (ii) Toon aan: $\exists r > 0 : \forall (x, y) \notin B(\mathbf{0}, r) : |f(x, y)| < \frac{1}{10}.$
- (iii) Toon aan: f neemt op $\mathbb{R}^2$ een maximum en een minimum aan.

6. Onderzoek in $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ de convergentie van elk van de volgende functie-rijen:

- (i) $(f_n)_n$ met $f_n(x) = \frac{nx^2}{nx^2 + 4};$
- (ii) $(g_n)_n$ met $g_n(x) = \frac{x^2}{nx^2 + 4};$
- (iii) $(h_n)_n$ met $h_n(x) = \frac{(\cos nx)^n}{x^2 + 4}.$

Normering:

1 : a) 2	2 : (i) 2	3 : 3	4 : (i) 3	5 : (i) 1	6 : 7
b) 3	(ii) 4		(ii) 2	(ii) 3	
	(iii) 3		(iii) 2	(iii) 3	
	(iv) 4		(iv) 3		
5	13	3	10	7	7

$$\text{Eindcijfer} = \frac{\# \text{ punten}}{5} + 1$$