

1. a) Onvermij: Zij $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$, dan A naar boven begrensd (bijv. door 0 of 401), maar $-A = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ is niet naar boven begrensd.

b) (i) Zij S een onderstelsel van A , d.v.z.:
 $\forall x \in A: s \leq x$. Dan $-s$ is een

begrenzen van $-A$.

(ii) $\inf A$ is een onderstelsel (en ook de kleinste) van A . Volgens (i) is $-\inf A$ dan ook een begrenzen van $-A$. Stel $K < -\inf A$ is ook een begrenzen van $-A$. Dan voor $-K > \inf A$ een onderstelsel van A . Tegengesteld. Dan $-\inf A$ is de kleinste begrenzen van $-A$; dus $-\inf A = \sup(-A)$.

2. (i) $A \Delta B = \{1\}$ dus $d(A, B) = 1$

$B \Delta C = \{1, 2\}$ dus $d(B, C) = 2$

$C \Delta D = \{1\}$ dus $d(C, D) = 1$

$D \Delta D = \emptyset$ dus $d(D, D) = 0$

(ii) - $A \Delta B$ is steeds eindig deelverz. van N dus $d(A, B) \in N \cup \{0\}$ dus $d(A, B) \geq 0$

- $A \Delta A = \emptyset$ dus $d(A, A) = 0$ als $A = B$

- als $A \neq B$ dan $A \Delta B \neq \emptyset$ dus $d(A, B) > 0$

- $A \Delta B = B \Delta A$ dus $d(A, B) = d(B, A)$.

- $A \Delta B \subset (A \Delta C) \cup (C \Delta B)$

(Betekent bij een $x \in A \Delta B$ dat 2 gevallen:
 $x \in C$ en $x \notin C$)

Dus $d(A, B) = \#(A \Delta B) \leq \#((A \Delta C) \cup (C \Delta B))$
 $\leq \#(A \Delta C) + \#(C \Delta B) = d(A, C) + d(C, B)$.

(iii) $B_d(\{1\}, 1) = \{\{1\}\}$ (tevens dat $d(A, B) < 1$ tussen tekenen $d(A, B) = 0$)

$B_d(\{1\}, 2) = \{\emptyset\} \cup \{\{1\}\} \cup \{\{1, n\} \mid n \in N \setminus \{1\}\}$

(iv) - X is niet sk, want elke bol $B_d(A, 1) = \{A\}$ is open in deze topologie.

- X is niet compact, want niet een begrensd $(d(\{1, 2, \dots, n\}, \emptyset) = n)$.

- X is niet volledig want de metrisch d is equiv. met de discrete metrisch (want alle seq. komen zijn open) en dus is elke Cauchy-rij in X vanaf zeker konvergen naar constant; dus convergent.

4. (i) Zij $f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ gegeven door

$$f(t) = (10 \cos t, 10 \sin t)$$

dan is f continu (opgebouwd uit 2 continue componentenfuncties) op de sk. $[0, 2\pi]$ (want convex); dus de waardenverz. van f op heel $[0, 2\pi]$ is ook sk. Maar dat is juist C

(ii) $K = C \times [0, 10]$ en dus sk als het product van 2 sk. verzamels.

(iii) $f(0, 10, 0) = 1 + \log 2 > 0$

$$f(b, 0) = e^b - b e^b + a \ln b + b \ln 2 < 0$$

f is continu (opgebund) met continue functies (projectie en diff. functies) op de sk. K en neemt dan volgens de extreme waardenstelling ook de waarden 0 op K aan.

(iv) C is gesloten + begrensd dus compact.

$[0, 10]$ is eveneens gesloten + begrensd dus compact.

Dus $K = C \times [0, 10]$ is ook compact.

De continue f neemt op de compacte K dan een maximum en een minimum aan.

3. Neem $p \in Y$ zodat $p \in f[X]$ ($\neq \emptyset$).

$\{p\}$ is eindig en heeft een eindig complement.

Dus $\{p\}$ heeft een gesloten complement.

Dus $\{p\}$ clopen in Y . Dus $f^{-1}[\{p\}]$ is clopen in X want f continu.

Dus X sk in $f^{-1}[\{p\}] \neq \emptyset$ = clopen

folgt: $f^{-1}[\{p\}] = X$ in 't in stert

dus f op heel X alleen de waarde p aanneemt; dus constant is.

5. (i) f is opgebund met continue functies (projectie, constante f 's, diff. functies) en dus continu.

(ii) Neem bijv. $z = 10$

Dan geldt voor elke $(x, y) \in B(0, z)$:

$$x^2 + y^2 \geq 100 \text{ en dus}$$

$$|f(x, y)| \leq \frac{1}{100 + 1} < \frac{1}{10}$$

(iii) f neemt als continue functie op de compacte $D(0, 1)$ (gesloten + begrensd) een max. en een min. aan.

Dus $f(0, 0) = \frac{-1}{1} < -\frac{1}{10}$ en $f(0, \sqrt{1}) = \frac{\cos \pi}{\pi + 1} = \frac{1}{\pi + 1} > \frac{1}{10}$

is het max. en min. van f op $D(0, 1)$ ook het max. en min. op heel $\mathbb{R}^2$.

(volgens (ii))

6. (i) $f_n(0) = 0 \rightarrow 0$ als $n \rightarrow \infty$ en als $x \neq 0$

$$\text{dan } f_n(x) = \frac{n x^2}{n x^2 + 4} = \frac{x^2}{x^2 + \frac{4}{n}} \rightarrow 1 \text{ als } n \rightarrow \infty$$

De puntsgewijze limiet is discontinu; elke f_n wel continu dus $\{f_n\}$ divergeert

(ii) $g_n(x) \rightarrow 0$ als $n \rightarrow \infty$ (houd als $x = 0$ als $x \neq 0$)

De puntsgewijze limiet g is dus de 0-functie

$$d(g_n, g) = \sup \{|g_n(x) - 0| \mid x \in \mathbb{R}\} \leq \frac{1}{n}$$

$$\text{dus } d(g_n, g) \rightarrow 0 \text{ als } n \rightarrow \infty$$

dus $g_n \rightarrow g$ als $n \rightarrow \infty$ dus $(g_n)_n$ convergeert

(iii) h_n is niet een puntsgewijze limiet; dus $(h_n)_n$ divergeert. Kijk naar een in $x = \pi$

$$\text{naar de zij } h_n(\pi) = \frac{(\cos n\pi)^n}{\pi^2 + 4} \text{ (telkens gelijkend } +1 \text{ en } -1)$$