



1. Zij d de euclidische metriek op $\mathbb{R}^2$ en d_1 de metriek op $\mathbb{R}^2$ gegeven door:

$$\begin{aligned} d_1(\underline{x}, \underline{y}) &= d(\underline{x}, \underline{y}) && \text{als } \underline{x} \neq \underline{0} \neq \underline{y}, \\ d_1(\underline{x}, \underline{0}) &= d_1(\underline{0}, \underline{x}) = d(\underline{x}, \underline{0}) + 2 && \text{als } \underline{x} \neq \underline{0}, \\ d_1(\underline{0}, \underline{0}) &= 0 && (\underline{0} = (0, 0) \text{ en } \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^2). \end{aligned}$$

Dat d_1 inderdaad een metriek op $\mathbb{R}^2$ is, behoeft u niet aan te tonen.

- a) Zij $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 = y^2\}$ en $B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x^2 + y^2 < 1\}$.
Bepaal in $(\mathbb{R}^2, d_1)$ (antwoorden volstaan!): $Rd(A)$, $Rd(B)$, A' en B' .
- b) Zij $f : (\mathbb{R}^2, d) \rightarrow (\mathbb{R}^2, d_1)$ gegeven door $f(x, y) = (y, x)$
en $g : (\mathbb{R}^2, d_1) \rightarrow (\mathbb{R}^2, d)$ gegeven door $g(x, y) = (x^2, y^2)$
en $h : (\mathbb{R}^2, d) \rightarrow (\mathbb{R}^2, d)$ gegeven door $h(x, y) = (y^2, x)$.
Ga na of f continu is in $(0, 0)$. Ga na of g continu is in $(0, 0)$.
Licht toe dat h continu is op $\mathbb{R}^2$.
- c) Onderzoek in $(\mathbb{R}^2, d_1)$ het volgende:
- (i) Is $(\mathbb{R}^2, d_1)$ samenhangend?
 - (ii) Is de rij $(\underline{x}_n)_n$ met $\underline{x}_n = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ convergent?
 - (iii) Is de verzameling $C := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ compact?
 - (iv) Is $(\mathbb{R}^2, d_1)$ volledig?

2. Zij $f : (X, d) \rightarrow (Y, \rho)$ een functie die voldoet aan:

$$\forall p \in X \quad \exists r > 0 \quad \forall x \in B_X(p, r) : \quad f(x) = f(p).$$

- (i) Licht toe dat f continu is op X .
- (ii) Toon aan: $\forall q \in Y : f^{-1}[\{q\}]$ is clopen in X .
- (iii) Toon aan: als X samenhangend is, dan is f constant.
- (iv) Toon aan: als X compact is, dan is $f[X]$ een eindige verzameling.

Z.O.Z.

3. Zij (X, d) een metrische ruimte en zij $\mathbb{Q}$ voorzien van de natuurlijke metriek.

a) Toon aan:

X is samenhangend $\iff$ iedere continue $f : X \rightarrow \mathbb{Q}$ is constant.

b) Toon aan:

Als X compact is en elke $x \in X$ heeft een eindige open omgeving U_x , dan is X zelf óók eindig.

4. Onderzoek de convergentie van elk van de onderstaande functie-rijen:

(i) $(f_n)_n$ met $f_n(x) = \frac{nx}{nx^2 + 4}$ in $\mathcal{B}(\mathbb{R})$;

(ii) $(g_n)_n$ met $g_n(x) = \frac{\cos(nx)}{n(x^2 + 4)}$ in $\mathcal{B}(\mathbb{R})$;

(iii) $(h_n)_n$ met $h_n(x) = \frac{\sin(nx)}{x^2 + 4}$ in $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Normering:

1 : a) 4	2 : (i) 2	3 : a) 4	4 : 7
b) 4	(ii) 4	b) 2	
c) 5	(iii) 2		
	(iv) 2		
13	10	6	7

$$\text{Eindcijfer} = \frac{\# \text{ punten}}{4} + 1$$

Het herkansingstentamen Metrische Topologie (over de hele stof) wordt afgenomen op dinsdag 29 juni 2004 van 13:30 tot 16:30 uur.