Uitwerking 2e deeltentamen Metrische Topologie (D2) 26/3/2004 (I

1. a) $Rd(A) = \bar{A} \setminus A^i = A \setminus \{\underline{0}\}$; $A' = A \setminus \{\underline{0}\}$;
$Rd(B) = \bar{B} \setminus B^i = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\}$;
$B' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x^2+y^2 \leq 1\}$.

b) $f(0,0) = (0,0)$. $\{(0,0)\}$ is (in $(\mathbb{R}^2, d_1)$) een omgeving van $(0,0)$ maar $f^{-1}[\{(0,0)\}] = \{(0,0)\}$ is géén omgeving van $(0,0)$ in $(\mathbb{R}^2, d)$. Dus f is niet continu in $(0,0)$.
g is zeker continu in $(0,0)$ want $(0,0)$ is geïsoleerd in $(\mathbb{R}^2, d_1)$. (Men mag ook zeggen: lokaal constant in $(0,0)$.)
h heeft 2 continue componentfuncties, want die zijn (opgebouwd uit) continue projecties en dus is h continu.
(We gebruiken hierbij dat de metriek in het codomein equiv. is met de productmetriek)

c) (i) <u>niet sh</u>, want $\{(0,0)\}$ is clopen in $(\mathbb{R}^2, d_1)$.
(ii) de rij convergeert in de eucl. metriek naar $(0,0)$ en zou t.o.v. d_1 dus ook alleen naar $(0,0)$ kunnen convergeren. Echter $d_1((0,0), (\frac{1}{n}, \frac{1}{n})) \geq 2$ voor elke $n \in \mathbb{N}$
Dus <u>niet convergent</u>.
(iii) De rij onder (ii) heeft t.o.v. d_1 ook geen conv. deelrij dus kan C <u>niet compact</u> zijn (die rij ligt nl. vanaf 2e term in C).
(iv) De rij onder (ii) is een Cauchy-rij (want conv. t.o.v. eucl. metriek) maar die rij is niet conv.
dus $(\mathbb{R}^2, d_1)$ is <u>niet volledig</u>.

2. (i) f is, volgens het gegeven, lokaal constant in élke $p \in X$ dus continu in élke $p \in X$. Dus f continu op X
(ii) $\{q\}$ is gesloten in Y ; f is continu. Dus $f^{-1}[\{q\}]$ is gesloten in X (voor élke $q \in Y$)

Vervolg 2 (ii) Neem willek. $q \in Y$:
Als $f^{-1}[\{q\}] = \emptyset$ dan clopen
Als $f^{-1}[\{q\}] \neq \emptyset$ neem dan willek. $p \in f^{-1}[\{q\}]$.
Dan $f(p) = q$ én $\exists \varepsilon > 0 : \forall x \in B_X(p,\varepsilon) : f(x) = f(p) = q$
M.a.w. $B_X(p,\varepsilon) \subset f^{-1}[\{q\}]$ en dus $f^{-1}[\{q\}]$ ook ge[...]
(iii) Kies $q \in f[X]$ dan $f^{-1}[\{q\}] \neq \emptyset$ én clopen.
Dus $f^{-1}[\{q\}] = X$ want X sh. Dus $\forall x \in X : f(x) = q$
(iv) $\forall q \in f[X] : f^{-1}[\{q\}] \neq \emptyset$ én clopen.
Als $f[X]$ oneindig zou zijn dan zou X te schrijven zijn als de vereniging van oneindig veel disjuncte, niet-lege clopen verzamelingen. Die geven dan een open overdekking zonder eindige deeloverdekking (Je kunt niet 1 exemplaar uit die open overdekking weglaten). Dan kan X niet compact zijn

3. a) (i) $\boxed{\Rightarrow}$ Stel X sh en $f : X \to \mathbb{Q}$ continu.
Dan $f[X]$ sh (in $\mathbb{Q}$!). De enige sh. deelverz. van $\mathbb{Q}$ zijn $\emptyset$ en alle singletons.
Dus $f[X]$ is een singleton ; dus f constant.
(ii) $\boxed{\Leftarrow}$ Stel X is <u>niet</u> sh dan is er een ontbinding $\{A,B\}$ van X. Definieer $f : X \to \mathbb{Q}$ als volgt
$f(x) = 0$ als $x \in A$ en $f(x) = 1$ als $x \in B$
Deze f is overal lokaal constant, dus continu maar <u>niet</u> constant.

b) Stel X compact en elke $x \in X$ heeft <u>eindige</u> open omgeving U_x.
Zij nu $\mathcal{U} := \{U_x \mid x \in X\}$. Dat is een open overdekking van X. Heeft dus een eindige deeloverdekking, zeg $\{U_{x_1}, U_{x_2}, \ldots, U_{x_k}\}$. Elke U_{x_i} is <u>eindig</u> ; dus de eindige vereniging ook. M[...]

4. (i) als $x = 0$ dan $f_n(0) = 0 \to 0$ als $n \to \infty$

als $x \neq 0$ dan $f_n(x) = \frac{nx}{nx^2+4} = \frac{x}{x^2+4/n} \to \frac{1}{x}$ als $n \to \infty$

Er is dus wel een puntsgewijze limiet f; maar die zit niet in $B(\mathbb{R})$ want niet begrensd en is trouwens ook niet continu (terwijl elke f_n wél continu)

Dus $(f_n)_n$ divergeert.

(ii) $\forall x \in \mathbb{R}$: $g_n(x) = \frac{\cos(nx)}{n(x^2+4)} \to 0$ als $n \to \infty$

Dus de puntsgewijze limiet g is de 0-functie.

$d(g_n, g) = \sup\{|g_n(x) - g(x)| \mid x \in \mathbb{R}\} \leq \frac{1}{4n}$

Dus $d(g_n, g) \to 0$ als $n \to \infty$ dus $g_n \to g$

dus $(g_n)_n$ convergeert.

(iii) Neem $x = \pi/2$ dan $h_n(\pi/2) = \frac{\sin(n \times \frac{\pi}{2})}{\frac{\pi^2}{4}+4}$;

dit heeft geen limiet als $n \to \infty$

(teller is 0 als n even en ± 1 als n oneven)

Er is dus geen puntsgewijze limiet.

Dus $(h_n)_n$ divergeert.