

Faculteit der Exacte Wetenschappen	1 ^e Deeltentamen Metrische Topologie
Afdeling Wiskunde	28-01-2004
Vrije Universiteit	13:30-15:30 uur

1. In deze opgave staan A en B voor niet-lege, begrensde deelverzamelingen van $\mathbb{R}$.
Bewijs of weerleg:

(i) $\forall A \subset \mathbb{R} :$
 $\sup A + \inf A = 0 \implies \exists x, y \in A : x + y = 0.$

(ii) $\forall A, B \subset \mathbb{R} :$
 $\sup A < \sup B \implies B \setminus A \neq \emptyset.$

2. [In deze opgave kunt u volstaan met het geven van de antwoorden.]
 Geef in elk van de onderstaande gevallen de afstand $d(f, g)$ van de gedefinieerde functies f en g in $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ (voorzien van de bekende supremum-metrik d):

(i) $f(x) = \arctan x; g(x) = 2 - \arctan x.$

(ii) $f(x) = \frac{x}{1+|x|}; g(x) = \sin x.$

(iii) $f(x) = \sin^2 x; g(x) = -3 - \cos^2 x.$

3. De functie $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ wordt gegeven door:

$$d(x, y) := \begin{cases} 0 & \text{als } x = y, \\ |x - 1| + |y - 1| & \text{als } x \neq y. \end{cases}$$

- (i) Toon aan dat d een metrik is op $\mathbb{R}$.
 (ii) Schets de volgende (open) bollen:

$$B_d(0, 1), \quad B_d(1, 1), \quad B_d(-1, 3).$$

- (iii) Zij $A = \mathbb{Q}$ en $B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Bepaal in $(\mathbb{R}, d)$ afsluiting en inwendige van A en B .
 [Antwoorden volstaan.]
 (iv) (i) Ga na of d equivalent is met de euclidische metrik op $\mathbb{R}$.
 (ii) Ga na of d equivalent is met de discrete metrik op $\mathbb{R}$.

Z.O.Z.

4. Zij $\mathbb{R}$ voorzien van de euclidische metriek. Ga na of het mogelijk is twee niet-lege, disjuncte deelverzamelingen A en B van $\mathbb{R}$ aan te geven zó dat $A \cup B \neq \mathbb{R}$, A is open, B is gesloten én $A \cup B$ is open.

5. Zij (X, d) een metrische ruimte. Gegeven is:

$$\forall A \subset X : A \text{ gesloten} \implies A^c \text{ gesloten.}$$

Toon aan: d is equivalent met de discrete metriek op X .

6. De metriek d op $\mathbb{R}$ is gegeven door:

$$d(x, y) := \begin{cases} 0 & \text{als } x = y, \\ x^2 + y^2 & \text{als } x \neq y. \end{cases}$$

[Niet aantonen dat d inderdaad een metriek is.]

Schets de volgende (open) bollen:

$$B_d(0, 1), \quad B_d(100, 100), \quad B_d\left(1, \frac{5}{4}\right).$$

Normering:

1 : 6	2 : 6	3 : (i) 4	4 : 3	5 : 4	6 : 3
		(ii) 3			
		(iii) 4			
		(iv) 3			
6	6	14	3	4	3

$$\text{Eindcijfer} = \frac{\# \text{ punten}}{4} + 1$$

Het tweede deeltentamen Metrische Topologie wordt afgenomen op vrijdag 26 maart 2004, 10:30-12:30 uur.