Uitwerking eerste deeltentamen (D1) Metrische Topologie

28-01-2004

1. (i) **Onwaar**: Zij $A = \{-1\} \cup (0,1)$ dan $\sup A = 1$ en $\inf A = -1$; dus $\inf A + \sup A = 0$ maar A bevat geen elementen die elkaars tegengestelde zijn (dan had bijv. 1 in A moeten zitten)

(ii) **Waar**: als $\sup A < \sup B$ dan is $\sup A$ géén bovengrens van B (want $\sup B$ is de <u>kleinste</u> bovengrens van B). Dus bestaat er een $x \in B$ met $x > \sup A$. Uit $x > \sup A$ volgt dat $x \notin A$. Maar dan: $x \in B \setminus A$. Dus $B \setminus A \neq \emptyset$.

2. (i) $d(f,g) = \pi + 2$

(ii) $d(f,g) = 2$

(iii) $d(f,g) = 4$

3. (i) Methode 1: d is de postmetriek op $\mathbb{R}$ uitgaande van de euclidische metriek met het postkantoor in 1 en is dus een metriek

Methode 2: We lopen alle eisen voor een metriek langs:

- $d(x,y) \geq 0$ evident
- $d(x,x) = 0$ gegeven
- $d(x,y) > 0$ als $x \neq y$ want $x \neq 1$ of $y \neq 1$ en dus $|x-1| > 0$ of $|y-1| > 0$.
- $d(x,y) = d(y,x)$ evident
- Stel $x \neq y \neq z \neq x$ dan

$$d(x,y) = |x-1| + |y-1| \leq |x-1| + |z-1| + |z-1| + |y-1| = d(x,z) + d(z,y)$$

dus ook de Δ's-ongelijkheid geldt.

3. (ii) $B_d(0,1) = \{0\}$

$B_d(1,1) = (0,2)$ (het open interval van 0 tot 2)

$B_d(-1,3) = \{-1\} \cup (0,2)$

(iii) $\bar{A} = A$ $\quad A^i = A \setminus \{1\}$

$\bar{B} = B \cup \{1\}$ $\quad B^i = B$

(iv)
- d is <u>niet</u> equivalent met de euclidische metriek: $\{0\}$ is open t.o.v. d (een open bol!), maar niet open t.o.v. eucl. metriek
- d is <u>niet</u> equivalent met de discrete metriek: $\{1\}$ is open t.o.v. discrete metriek (immers een open bol!), maar niet open t.o.v. d (elke bol om 1 bevat punten $\neq 1$)

4. Ja, dat kan:

Voorbeeld 1: $B = [1, \rightarrow)$ dan B gesloten

$A = (0,1)$ dan A open

dan $A \cup B = (0, \rightarrow)$ dan $A \cup B$ open

Voorbeeld 2: $B = \{1\}$ dan B gesloten

$A = (0,1) \cup (1,2)$ dan A open

dan $A \cup B = (0,2)$ dan $A \cup B$ open

5. Kies willekeurige $p \in X$
Dan $\{p\}$ gesloten (stelling)
Dus $X \setminus \{p\}$ ook gesloten (volgt uit gegeven)
Dus $\{p\}$ óók open.
Dus elke singleton-verz. is open in (X, d)
Dus elke verz. is open in (X, d)
Dus brengen d en de discrete metriek dezelfde topologie voort (nl. de machtsverz. van X)

6. $B_d(0,1) = (-1, +1)$ (het open interval van -1 tot 1)

$B_d(100, 100) = \{100\}$

$B_d(1, \frac{5}{4}) = \{1\} \cup (-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2})$.