

1. A en B zijn niet-lege begrensde deelverzamelingen van $\mathbb{R}$. Bewijs of weerleg:

(i) $\sup A < \inf B \implies A \cap B = \emptyset$;

(ii) $\sup A = \inf B \implies A \cap B \neq \emptyset$.

2. Zij $X = \mathbb{R}$ voorzien van de volgende metriek d :

$$d(x, y) := \begin{cases} 3x + 3y & \text{als } x > 0 \text{ en } y > 0 \text{ en } x \neq y \\ 0 & \text{als } x = y \\ |x - y| & \text{als } x \leq 0 \wedge y \leq 0 \\ -x + 3y & \text{als } x \leq 0 \wedge y \geq 0 \\ -y + 3x & \text{als } y \leq 0 \wedge x \geq 0. \end{cases}$$

a) Toon aan: d is inderdaad een metriek op X .

[Beperk u bij de driehoeksongelijkheid tot drie niet-triviale gevallen.]

b) [Antwoorden volstaan]

Bepaal de volgende (open) bollen in (X, d) :

$$B_d(4, 1); \quad B_d(-4, 1); \quad B_d(1, 4).$$

c) [Antwoorden volstaan]

Zij $A = \mathbb{Q}$ en $B = [-2, 2]$.

Bepaal in (X, d) de afsluiting, het inwendige en de rand van A en van B .

d) [Antwoorden volstaan]

Geef in (X, d) een oneindige verzameling die

(i) zowel compact als samenhangend is;

(ii) noch compact noch samenhangend is.

e) De functies $f, g : (X, d) \rightarrow (X, d)$ zijn gegeven door:

$$f(x) = x + 4 \quad \text{en} \quad g(x) = x - 4.$$

Onderzoek beide functies op continuïteit in het punt $x = -2$.

Z.O.Z.

3. Zij $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ gegeven door

$$f(x, y, z) = (2x, 3y, 4z).$$

Zij $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven door

$$g(x, y, z) = 2x^2 + 3y - 4z.$$

a) Zij $A := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x^2 + 3y^2 + 4z^2 \leq 5 \right\}$.

Toon aan: de functie $g \circ f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ neemt op A een maximum aan.

b) Zij $B := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x^2 + 3y^2 - 4z^2 \leq 5 \right\}$.

Ga na of $g \circ f$ op B ook een maximum aanneemt.

c) Zij $C := [-1, 2] \times [-1, 2] \times [1, 2]$. Bepaal de volledige waardenverzameling van $g \circ f$ op C [m.a.w. bepaal $(g \circ f)[C]$.]

4. a) Zij (X, d) volledig en zij $f: (X, d) \rightarrow (Y, \rho)$ continu. Zij $(x_n)_n$ een Cauchy-rij in X . Toon aan: $(f(x_n))_n$ is een Cauchy-rij in Y .

b) Laat d.m.v. een voorbeeld zien dat de volledigheid van X in onderdeel a) een noodzakelijke voorwaarde is.

5. Onderzoek elk van de volgende functie-rijen op convergentie in $\mathcal{B}(\mathbb{R})$:

(i) $(f_n)_n$ met $f_n(x) = \frac{\sin^n x + \cos^n x}{3}$;

(ii) $(g_n)_n$ met $g_n(x) = \frac{|\sin x|^n + |\cos x|^n}{3}$;

(iii) $(h_n)_n$ met $h_n(x) = \left(\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{3} \right)^n$.

Normering:

1 : 5	2 : a) 4	3 : a) 4	4 : a) 4	5 : 8
	b) 3	b) 3	b) 3	
	c) 3	c) 4		
	d) 2			
	e) 2			
5	14	11	7	8

$$\text{Eindcijfer} = \frac{\# \text{ punten}}{5} + 1$$