

1. (i) Voor. Bewijs: bij  $x \in A$  en  $y \in B$  wilskewijf  
geven. Dan geldt:

$$x \leq \sup A < \inf B \leq y, \text{ dus } x < y \text{ en dus}$$

zeker  $x \neq y$ . Dus  $A$  en  $B$  hebben geen gemeenschappelijke elementen.

(Alternatief: uit het onafhankelijk)

(ii) Omgekeerd. Tegenvoorbeeld:  $A = (0, 1)$  en  $B = (1, 2)$   
dan  $\sup A = 1 = \inf B$  maar  $A \cap B = \emptyset$ .

2. a)  $d(x, y) \geq 0$  volgt uit de def. (loop alle gevallen  
naar na)

-  $d(x, x) = 0$  is duidelijk

- als  $x \neq y$  dan  $d(x, y) > 0$  (loop alle gevallen  
naar na)

-  $d(x, y) = d(y, x)$  volgt uit:

$$3x + 3y = 3y + 3x \quad (\text{als } x > 0 \wedge y > 0 \text{ en } x \neq y)$$

$$|x - y| = |y - x| \quad (\text{als } x, y \leq 0)$$

$$\text{als } x \leq 0 \wedge y \geq 0 \text{ dan } d(x, y) = -x + 3y$$

$$\text{en } d(y, x) = -x + 3y \quad (x \text{ en } y \text{ verwisseld in laatste term)}$$

- Verlos de  $\Delta$ 's onafhankelijk:

stel  $x \neq y \neq z$  en  $x, y, z > 0$

$$\text{dan } d(x, y) = 3x + 3y < 3x + 3z + 3z + 3y = d(x, z) + d(z, y).$$

(II)

stel  $x \neq y \neq z \neq x$  en  $x, y, z \leq 0$

$$\text{dan } d(x, y) = |x - y| = |x - z + z - y| \leq |x - z| + |z - y| = d(x, z) + d(z, y)$$

stel  $x \neq y \neq z \neq x$  en  $x \leq 0$  en  $y, z > 0$

$$\text{dan } d(x, y) = -x + 3y < -x + 3z + 3z + 3y = d(x, z) + d(z, y)$$

$$b) \cdot B_d(4, 1) = \{4\}; \quad B_d(-4, 1) = (-5, -3);$$

$$B_d(1, 4) = (-1, +\frac{1}{3}) \cup \{1\}$$

$$c) \cdot \bar{A} = (\leftarrow, 0] \cup \mathbb{Q}; \quad A^i = (0, \rightarrow) \cap \mathbb{Q};$$

$$Rd(A) = \bar{A} \setminus A^i = (\leftarrow, 0]$$

$$\cdot \bar{B} = [-2, +2]; \quad B^i = (-2, +2]; \quad Rd(B) = \{-2\}.$$

$$d) (i) \text{ bij v. } [-4, -3]$$

$$(ii) \text{ bij v. } [3, 4]$$

e)  $f$  is niet continu in  $-2$ : Neem de bij  $x_n = -2 + \frac{1}{n}$   
dan  $x_n \rightarrow -2$  maar  $f(x_n) = 2 + \frac{1}{n} \not\rightarrow 2$  als  $n \rightarrow \infty$

$g$  is wel continu in  $-2$ : Op het interval  $(-3, -1)$  is  $g$  gewoon en is omkeerbaar.

3. a)  $f$  is continu, want de 3 component functies zijn continu (opgebouwd uit constante functies en projecties)

$g$  is continu, want opgebouwd uit constante functies en projecties.

Deur de compositie  $g \circ f$  oök continu.

$A$  is beperkt en gesloten in  $\mathbb{R}^3$  der compact.

Deur de continue  $g \circ f$  neemt op  $A$  een max. aan.

$$b) f(0,0,2) = (0,0,42) \text{ en } \text{den}(g \circ f)(0,0,2) = g(0,0,42) = -162$$

Bedenk dat  $(0,0,2) \in B$  voor elke  $2 \in \mathbb{R}$ .

Deur  $g \circ f$  neemt op  $B$  willekeurig hoge waarden aan en heeft op  $B$  der geen maximum.

$$c) (g \circ f)(x,y,z) = g(2x,3y,4z) = 8x^2 + 9y - 16z$$

Het is duidelijk dat  $g \circ f$  op  $C$  het maximum 34 heeft en het minimum -41.

Daar  $C$  sk is (als produkt van 3 convexe en der sk intervallen) worden alle extremal-punten bereikt door de continue  $g \circ f$  oök op  $C$  aan te nemen:  $\text{den}(g \circ f)[C] = [-41, 34]$ .

4. a) Daar  $(x_n)_n$  een Cauchy-rij in de volledige ruimte  $X$ , is  $(x_n)_n$  convergent in  $X$ . Deur  $x_n \rightarrow p$  voor zeker  $p \in X$ . Daar  $f$  continu geldt:  $f(x_n) \rightarrow f(p)$  in  $Y$ . Deur  $(f(x_n))_n$  convergent in  $Y$ ; waar in der zeker een Cauchy-rij in  $Y$ .

4. b) Neem  $X = Y = (0, \infty)$  met gewone metriek en  $f: X \rightarrow Y$  gegeven door  $f(x) = \frac{1}{x}$ . Daar is  $f$  continu. Zij nu  $x_n = \frac{1}{n}$  der  $(x_n)_n$  een Cauchy-rij in  $X$ , maar  $(f(x_n))_n = (n)_n$  is geen Cauchy-rij in  $Y$ . (Kiest niet een beperkt).

5. (i) Neem  $x = -\frac{\pi}{2}$  der  $f_n(-\frac{\pi}{2}) = \frac{(-1)^n}{3}$ . Deze rij functie-waarden heeft geen limiet voor  $n \rightarrow \infty$ . Er is der geen puntwijze limiet; der zeker geen limiet. Deur  $(f_n)_n$  divergeert.

(ii) Als  $x \neq 0 \pmod{\frac{\pi}{2}}$  der

$$f_n(x) \rightarrow \frac{0+0}{3} = 0 \text{ als } n \rightarrow \infty$$

$$\text{Als } x \equiv 0 \pmod{\frac{\pi}{2}} \text{ der}$$

$$f_n(x) = \frac{1}{3} \rightarrow \frac{1}{3} \text{ als } n \rightarrow \infty$$

Er is der wel een puntwijze limiet  $g$ , maar  $g$  is niet continu (en elke  $g_n$  wel), der  $f_n \rightarrow g$  der  $(g_n)_n$  divergeert.

(iii) Merk op: elke  $\frac{1}{3^n}$  is constant, en zul  $h_n(x) = \frac{1}{3^n}$

Daar  $\frac{1}{3^n} \rightarrow 0$  volgt der de 0-functie  $h$  der puntwijze limiet en dat  $d(h_n, h) = \frac{1}{3^n}$

Daar  $\frac{1}{3^n} \rightarrow 0$  als  $n \rightarrow \infty$  volgt  $d(h_n, h) \rightarrow 0$  der  $h_n \rightarrow h$  der  $(h_n)_n$  convergeert.