

1. Zij $X = [-10, +10]$ voorzien van de volgende metriek d :

$$\begin{aligned}d(x, y) &= |x - y| && \text{als } xy \neq 0; \\d(x, 0) &= d(0, x) = 1 + |x| && \text{als } x \neq 0; \\d(0, 0) &= 0.\end{aligned}$$

[U hoeft niet meer aan te tonen dat d inderdaad een metriek is.]

- a) Zij $A = \mathbb{Q} \cap X$. Bepaal in (X, d) :
(i) $\text{Rd}A$, (ii) A' en (iii) alle geïsoleerde punten van A .
[Antwoorden volstaan bij onderdeel a).]
b) De rijen $(u_n)_n$ en $(v_n)_n$ in (X, d) zijn gegeven door:

$$u_n = \frac{1}{n} \quad \text{en} \quad v_n = \frac{n-1}{n} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

- (i) Onderzoek of $(u_n)_n$ een Cauchy-rij is in (X, d) .
Onderzoek of $(u_n)_n$ convergent is in (X, d) .
(ii) Dezelfde vragen als onder (i), maar nu voor de rij $(v_n)_n$.
c) Ga na of (X, d) samenhangend / compact / volledig is.
d) Zij $f : (X, d) \rightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|)$ gegeven door:

$$\begin{aligned}f(x) &= 0 && \text{als } x \neq 0, \\f(x) &= 1 && \text{als } x = 0.\end{aligned}$$

Ga na of f continu / uniform continu is.

- e) Zij $g : (X, d) \rightarrow (X, d)$ gegeven door:

$$\begin{aligned}g(x) &= \frac{x-1}{2} && \text{als } x \neq 0, \\g(x) &= 0 && \text{als } x = 0.\end{aligned}$$

Ga na of g continu / uniform continu is.

Z.O.Z.

2. Zij $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continu. Bovendien geldt: $\forall x \in \mathbb{R} : f(x+10) = f(x)$.
- Toon aan dat f op $\mathbb{R}$ zowel een maximum als een minimum aanneemt.
 - Toon aan dat $f[\mathbb{R}] = [a, b]$ voor zekere $a \leq b \in \mathbb{R}$.

Definieer $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ als volgt:

$$g(x) = f(x) - f(x+5), \quad (x \in \mathbb{R}).$$

- Toon aan dat de functie g oneindig veel nulpunten heeft.
3. Zij $A \subset \mathbb{R}^2$ ($\mathbb{R}^2$ voorzien van de euclidische metriek).
- Bewijs of weerleg:
- A samenhangend $\Rightarrow A^i$ samenhangend;
 - $\overline{A}$ compact $\Rightarrow A$ compact;
 - A compact $\Rightarrow \text{Rd}(A)$ compact.
4. Onderzoek elk van de onderstaande functierijen op convergentie:
- $(f_n)_n$ met $f_n(x) = \sin\left(\frac{n}{x}\right)$ in $\mathcal{B}((0, \rightarrow))$;
 - $(g_n)_n$ met $g_n(x) = \frac{\cos(nx)}{n}$ in $\mathcal{B}((0, \rightarrow))$;
 - $(h_n)_n$ met $h_n(x) = \arctan(nx)$ in $\mathcal{B}([0, \rightarrow))$.

Normering:

1 : a) 2	2 : a) 3	3 : 7	4 : 7
b) 3	b) 3		
c) 3	c) 4		
d) 2			
e) 2			
12	10	7	7

$$\text{Eindcijfer} = \frac{\# \text{ punten}}{4} + 1$$

Het herkansingstentamen Metrische Topologie (over de hele stof) wordt afgenomen op donderdag 28 augustus 2003 van 13:30 tot 16:30 uur.