Uitwerking 2e deeltentamen Metrische Topologie (D2) 28/3/03 (I)

1. a) $Rd(A) = X \setminus \{0\}$;
$A' = X \setminus \{0\}$;
0 is het enige geïsoleerde punt van A.

b) (i) $(u_n)_n$ is een Cauchy-rij in X : immers :
$d(u_n, u_m) = |\frac{1}{n} - \frac{1}{m}| \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{m} < \varepsilon$ als $n, m > \frac{2}{\varepsilon}$.
$(u_n)_n$ convergeert niet (naar 0) in X : immers :
$d(u_n, 0) \geq 1$ voor elke $n \in \mathbb{N}$.
Een andere limiet kan $(u_n)_n$ niet hebben ; dan zou $(u_n)_n$ in $(X, |\cdot|)$ nl. méér dan 1 limiet hebben.

(ii) $d(v_n, 1) = |\frac{n-1}{n} - 1| = \frac{1}{n} \to 0$ als $n \to \infty$.
Dus $v_n \to 1$ in (X,d). Dus $(v_n)_n$ convergeert
Dus $(v_n)_n$ is óók een Cauchy-rij.

c) – (X,d) is niet samenhangend : $\{0\}$ is clopen in (X,d) (en niet triviaal)
– (X,d) is niet volledig : zie b(i) : $(u_n)_n$ is een Cauchy-rij, die niet convergeert
– (X,d) kan dan ook niet compact zijn : elke compacte ruimte is immers óók volledig.

d) f is uniform continu (en dus zeker continu).
Immers, zij $\varepsilon > 0$ willekeurig gegeven. Neem $\delta = \frac{1}{2}$
Als $xy \neq 0$ en $d(x,y) < \delta$ dan $f(x) = f(y) = 0$
en dus $|f(x) - f(y)| = 0 < \varepsilon$
Als bijv. $x = 0$ en $d(x,y) < \delta$ dan ook $y = 0$ en dan dus $f(x) = f(y) = 1$ en dus $|f(x) - f(y)| = 0 < \varepsilon$

e) g is niet eens continu (en dus zeker niet uniform continu). Immers : $\{0\}$ is clopen in (X,d) maar $f^{-1}[\{0\}] = \{0,1\}$ is niet clopen in (X,d).

2. a) $f[\mathbb{R}] = f[0,10]$ daar f periodiek is met periode 10.
We hoeven dus alleen na te gaan of f op $[0,10]$ een max. en een min. heeft.
Welnu : $[0,10]$ is compact (gesloten en begrensd in $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.) en f is continu. Dus f neemt op $[0,10]$ zowel een max. als een min. aan.

b) $\mathbb{R}$ is sh en f is continu ; dus $f[\mathbb{R}]$ is sh, dus convex. Volgens a) heeft $f[\mathbb{R}]$ een max en een min. Dan is $f[\mathbb{R}]$ een gesloten (begrensd) interval.

c) Daar g ook periodiek is met periode 10, volstaat het aan te tonen dat g een nulpunt heeft.
Stel $f(0) = 0$; dan zijn we klaar.
Stel $f(0) \neq 0$, dan $g(0) = f(0) - f(5)$
en $g(5) = f(5) - f(10) = f(5) - f(0) = -g(0)$.
Dan hebben $g(0)$ en $g(5)$ tegengesteld teken.
Daar $[0,5]$ sh en g continu neemt g tussen 0 en 5 de waarde 0 aan. . Óók klaar!

3. (i) Onwaar : Zij $A = \{(x,y) \mid xy \geq 0\}$ dan A sh.
Echter $A^i = \{(x,y) \mid xy > 0\}$ is onsh.

(ii) Zij $A = (0,1) \times (0,1)$ dan A niet gesloten dus niet compact. $\bar{A} = [0,1] \times [0,1]$ is gesloten en begrensd in $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$ dus wél compact.
Dus (ii) is óók onwaar.

(iii) Waar : Stel A compact dan A gesloten.
Dan $f^{-1}(A)$ een gesloten deel van $\bar{A} = A$; dus gesloten in de compacte A . . . . . .

4. (i) Kies $x \in (0, \rightarrow)$ vast.

$f_n(x) = \sin\left(\frac{n}{x}\right)$ heeft geen limiet als $n \to \infty$

Dus $(f_n)_n$ heeft geen puntsgewijze limiet; laat staan een limiet. Dus $(f_n)_n$ divergeert.

(ii) Kies $x \in (0, \rightarrow)$ vast.

$f_n(x) = \frac{\cos(nx)}{n} \to 0$ als $n \to \infty$ (teller begrensd)

De puntsgewijze limiet f is dan de 0-functie.

$d(g_n, g) = \sup\{|f_n(x) - f(x)| \mid x > 0\} =$

$= \sup\left\{\left|\frac{\cos(nx)}{n}\right| \mid x > 0\right\} = \frac{1}{n}$.

$d(g_n, g) = \frac{1}{n} \to 0$ als $n \to \infty$

Dus $g_n \to g$ dus $(g_n)_n$ convergeert.

(iii) $h_n(0) = \arctan 0 = 0 \to 0$ als $n \to \infty$

$h_n(x) \underset{x>0}{=} \arctan(nx) \to \frac{\pi}{2}$ als $n \to \infty$

Er is dus wél een puntsgewijze limiet h, nl met $h(0) = 0$ en $h(x) = \frac{\pi}{2}$ als $x > 0$.

Dus h niet continu en elke h_n wél continu. Dus $h_n \not\to h$ als $n \to \infty$.

Dus $(h_n)_n$ divergeert.