

1. (i) Onwaar: neem bijv. $A = \{1, 2, 4\}$ en $B = \{1, 3, 4\}$
dan $\inf A = \inf B = 1$ en $\sup A = \sup B = 4$
maar $A \not\subseteq B \wedge B \not\subseteq A$.

(ii) Waar: Neem een $x \in A$ (dat kan, want $A \neq \emptyset$)
Dan $x \leq \sup A < \sup B$. Dus $x < \sup B$.
Dus x is geen bovengrens van B , want
 $\sup B$ is de kleinste bovengrens van B . Maar als x
geen bovengrens van B is, moet er een $y \in B$
bestaan zo dat $x < y$.

2. (i) $d(x, y) \geq 0$, $d(x, x) = 0$ en $d(x, y) = d(y, x)$ triviaal.
Als $x \neq y$ dan $d(x, y) \geq 1 > 0$.
Nu nog de Δ 's-ongelijkheid. Neem willek.
 $x \neq y \neq z \neq x$. Dan

$$d(x, y) = 2|x - y| + 1 \leq 2|x - z| + 2|z - y| + 1 \leq \\ 2|x - z| + 1 + 2|z - y| + 1 = d(x, z) + d(z, y).$$

(ii) $B_d(4, \frac{1}{2}) = \{4\}$; $B_d(5, 1) = \{5\}$; $B_d(6, 2) = (5\frac{1}{2}, 6\frac{1}{2})$.

(iii) $\bar{A} = A$ en $A^i = A$

(iv) $\forall p \in \mathbb{R} : B_d(p, \frac{1}{2}) = \{p\}$ dus elke singleton-
verzameling is open in $(\mathbb{R}, d)$, dus elke verz.
is open in $(\mathbb{R}, d)$. Dit is ook waar voor de
discrete metriek. Dus beide metrieken zijn
equivalent.

3. (i) $\tilde{d}(x, y) = 2|x - y|$ levert een metriek op $\mathbb{R}$.
Maar dan is ρ de afmetting ter hoogte 1
van $\tilde{d}$ en dus zelf ook weer een metriek.
Men kan dit overigens ook weer helemaal nagaan.

$$3 \text{ (ii) } B_p(4, \frac{1}{2}) = (3\frac{3}{4}, 4\frac{1}{4}) ; B_p(5, 1) = (4\frac{1}{2}, 5\frac{1}{2}) ; \\ B_p(6, 2) = \mathbb{R}$$

$$\text{(iii) } \bar{A} = [0, 1] \text{ en } A^i = \emptyset$$

(iv) p is niet equivalent met de metriek d uit opgave 2. Immers:

$\{4\}$ is open in $(\mathbb{R}, d)$ maar niet in $(\mathbb{R}, p)$

(Men kan ook zeggen: A heeft in $(\mathbb{R}, d)$ een andere afsluiting dan in $(\mathbb{R}, p)$.)

4. (i) Waar: Neem willek. open A en B met $A \cap B = \emptyset$. Dan geldt: $A \subset B^c$.
Daar B open is, is B^c gesloten. Daar $\bar{A}$ de kleinste gesloten vers. is die A bevat, geldt dan dus ook $\bar{A} \subset B^c$ of wel $\bar{A} \cap B = \emptyset$.
Op dezelfde wijze bewijst men $A \cap \bar{B} = \emptyset$.

(ii) Onwaar: Neem $A = (0, 1)$ en $B = (1, 2)$ dan A en B beide open (bollen / intervallen). Bovendien $A \cap B = \emptyset$.
Echter $\bar{A} \cap \bar{B} = [0, 1] \cap [1, 2] = \{1\} \neq \emptyset$.