

Faculteit der Exacte Wetenschappen	Tentamen Metrische Topologie
Divisie Wiskunde en Informatica	29-08-2002
Vrije Universiteit	13:30-16:30 uur

1. Zij $A \subset \mathbb{R}$ niet-leeg en begrensd. Zij $B := \{x + 2 \mid x \in A\}$.

Toon aan: $\sup B = 2 + \sup A$.

2. (X, d_1) en (Y, d_2) zijn metrische ruimten. Definieer de volgende functie d :

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) := d_1(x_1, x_2) + d_2(y_1, y_2). \\ (x_1, x_2 \in X; y_1, y_2 \in Y)$$

Toon aan: d is een metriek op $X \times Y$.

3. Zij $X = \mathbb{R}^2$. De functie $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ wordt gegeven door

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) := \begin{cases} |x_1 - x_2|, & \text{als } y_1 = y_2, \\ |x_1 - x_2| + 1, & \text{als } y_1 \neq y_2. \end{cases}$$

- Toon aan dat d een metriek op X is, en ga na of d equivalent is met de euclidische metriek op X .
- Is (X, d) samenhangend?
- Zij $E = [0, 1] \times [0, 1]$. Is E compact in (X, d) ? Wat is E^i ?
- Zij $\underline{x}_n = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ en $\underline{y}_n = (\frac{1}{n}, 0)$. Onderzoek de rijen $(\underline{x}_n)_n$ en $(\underline{y}_n)_n$ in (X, d) op convergentie. Is (X, d) volledig?
- Zij $f : (X, d) \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven door $f(x, y) = x$, en zij $g : (X, d) \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven door $g(x, y) = \lfloor y \rfloor$. Is f continu? Is g continu?
[N.B. $\lfloor y \rfloor = \max \{z \in \mathbb{Z} \mid z \leq y\}$; de zogenaamde entierwaarde van y .]

Z.O.Z.

4. Zij (X, d) compact en niet-leeg en (Y, d_1) een metrische ruimte. Toon aan:
- d is begrensd;
 - als elk punt in X een eindige omgeving heeft, dan is X eindig;
 - als $f : X \rightarrow Y$ continu is, dan is $Y \setminus f[X]$ open in Y ;
 - als $f : X \rightarrow Y$ continu is en $(x_n)_n$ is een rij in X zó dat $f(x_n) \rightarrow y$ voor zekere $y \in Y$, dan bestaat er een $x \in X$ met $y = f(x)$.

5. Zij $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$ als $(x, y) \neq (0, 0)$ en $g(x, y) = y f(x, y)$ als $(x, y) \neq (0, 0)$ en $f(0, 0) = g(0, 0) = 0$.

Onderzoek de continuïteit van f én van g in de punten $(0, 0)$ en $(1, 1)$.

6. De functie-rij $(f_n)_n$ in $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ is gegeven door

$$f_n(x) = \frac{1}{n^3(x - \frac{1}{n})^2 + 1}.$$

- Toon aan dat de rij $(f_n)_n$ puntsgewijs convergeert.
- Toon aan: $\forall n \in \mathbb{N} : f_n[\mathbb{R}] = (0, 1]$.
- Ga na of de functie f_1 uniform continu is op $\mathbb{R}$.
- Ga na of de rij $(f_n)_n$ convergeert in $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Normering:

1 : 4	2 : 4	3 : a) 3 b) 2 c) 3 d) 3 e) 2	4 : a) 2 b) 3 c) 2 d) 3	5 : 5	6 : a) 2 b) 3 c) 2 d) 2
—	—	—	—	—	—
4	4	13	10	5	9

$$\text{Eindcijfer} = \frac{\# \text{ punten}}{5} + 1$$