Uitwerking tentamen Metrische topologie 29/0/2002 (1)

1\. (i) Zij $y \in B$ willekeurig gekozen. Dan $y = x+2$ voor zekere $x \in A$. Daar $x \leq \sup A$ geldt $y = x+2 \leq 2+\sup A$. Dus $2+\sup A$ is in elk geval een bovengrens van B.

(ii) Zij $t \in \mathbb{R}$ zó dat $t < 2+\sup A$. Dan $t-2 < \sup A$ en dus $t-2$ géén bovengrens van A. Er is dus een $x \in A$ zó dat $t-2 < x$. Dus $t < x+2 \in B$. Dus t is géén bovengrens van B, en dus is $2+\sup A$ de kleinste bovengrens van B.

2\. – Daar d_1 en d_2 metrieken zijn volgt eenvoudig:
$d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) \geq 0$ en $d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = d((x_2,y_2),(x_1,y_1))$.

– Stel $d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = 0$; dan ook
$d_1(x_1,x_2)=0 \wedge d_2(y_1,y_2)=0$ (want $d_1, d_2 \geq 0$)
Maar dan $x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2$, dus $(x_1,y_1)=(x_2,y_2)$.

– $d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = d_1(x_1,x_2) + d_2(y_1,y_2) \leq$
$\leq d_1(x_1,x_3) + d_1(x_3,x_2) + d_2(y_1,y_3) + d_2(y_3,y_2)$
$= d((x_1,y_1),(x_3,y_3)) + d((x_3,y_3),(x_2,y_2))$.

3\. a) Neem $X_1 = \mathbb{R}$ en d_1 de eucl. metriek op $\mathbb{R}$ en neem $X_2 = \mathbb{R}$ en d_2 de discrete metriek op $\mathbb{R}$ dan is d precies de metriek die in opgave 2) op $\mathbb{R}^2$ wordt gedefinieerd. Dus d metriek. (Het kan overigens ook heel snel rechtstreeks bewezen worden)

(II)

Vervolg 3. a):

d is niet equivalent met de euclidische metriek op $X = \mathbb{R}^2$ want bijv.
$B_d((0,0),\frac{1}{2}) = (-\frac{1}{2},+\frac{1}{2}) \times \{0\}$ is open in (X,d) maar niet open m.b.t. de eucl. metriek.

b) $\forall p \in \mathbb{R}$ geldt: $\mathbb{R} \times \{p\}$ is open in X; maar ook $\mathbb{R} \times \{p\}$ is gesloten in X. Dus X bevat veel niet-triviale clopen deelverz. Dus X is niet samenhangend.

c) Zij $O_p = \mathbb{R} \times \{p\}$ voor $p \in [0,1]$. Geeft open overdekking van E waaruit men geen enkel exemplaar kan weglaten. Dus heeft geen eindige deeloverdekking. Dus E is niet compact.
$E^i = (0,1) \times [0,1]$.

d) Als $n \neq m$ dan $d(\underline{x}_n,\underline{x}_m) \geq 1$ dus de rij $(\underline{x}_n)_n$ is niet eens een Cauchy-rij, dus zeker niet convergent.
$d(\underline{y}_n,(0,0)) = \frac{1}{n} \to 0$ dus $\underline{y}_n \to (0,0)$; dus wél convergent.
Zij $(\underline{z}_n)_n$ een Cauchy-rij in X. Dan $\exists N$: $\forall n,m \geq N$: $d(\underline{z}_n,\underline{z}_m) < 1$. Maar dat betekent dat vanaf rangnummer N alle termen v/d rij op dezelfde horizontale lijn in X liggen; zeg $\mathbb{R} \times \{p\}$. Maar $\mathbb{R} \times \{p\}$ is volledig en dus convergeert de rij $(\underline{z}_n)_n$ in $\mathbb{R} \times \{p\}$ en dus zeker in X. X is dus volledig.

Vervolg 3 e):

III

e) $|f(x_1,y_1) - f(x_2,y_2)| = |x_1 - x_2| \leq d((x_1,y_1),(x_2,y_2))$
dus f is zelfs uniform continu en dus zeker continu.
Op elke (open) $\mathbb{R} \times \{p\}$ is f constant; dus f is lokaal constant; dus f is zeker continu.

4. a) Kies $p \in X$ en zij $\mathcal{U} := \{B_d(p,n) \mid n \in \mathbb{N}\}$.
Dan is $\mathcal{U}$ een open overdekking van X en heeft dus een eindige deeloverdekking $\mathcal{U}' := \{B_d(p,n_1), \dots B_d(p,n_k)\}$ (z.b.d.a. $n_1 < n_2 < \dots < n_k$). Maar dat betekent:
$X \subset B_d(p,n_k)$. Dus X is begrensd; dus d is een begrensde metriek op X.

b) Als elk punt in X een eindige omgeving heeft, dan heeft elk pt. ook een eindige open omgeving. Al die open omgevingen vormen samen een open overdekking van X, maar die heeft een eindige deeloverdekking. X wordt dus overdekt door eindig veel eindige verz.$^\text{n}$ en is dus zelf eindig.

c) $f[X]$ is compact in Y (continu beeld v/d compacte X) en dus gesloten in Y. Dus $Y \setminus f[X]$ is open in Y.

d) De rij $(f(x_n))_n$ ligt helemaal in de gesloten $f[X]$.
Als dus $f(x_n) \to y$ dan $y \in \overline{f[X]} = f[X]$.
Maar $y \in f[X]$ betekent gewoon: $\exists x \in X$:
$y = f(x)$

IV

5. f én g zijn als quotient van continue functies (geheel opgebouwd uit continue projecties) zelf ook continu in $(1,1)$.
Daar $f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right) = \dfrac{1/n^4}{1/n^4 + 1/n^4} = \frac{1}{2} \not\to f(0,0) = 0$ als $n \to \infty$
is f niet continu in $(0,0)$.
$|g(x,y) - g(0,0)| \overset{(x,y) \neq (0,0)}{=} \dfrac{x^2y^2}{x^4+y^2} = x^2 \dfrac{y^2}{x^4+y^2} \leq x^2 \leq x^2+y^2 = \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2$. Hieruit volgt de continuiteit van g in $(0,0)$. Men neme bij gegeven $\varepsilon > 0$ gewoon $\delta = \sqrt{\varepsilon}$.

6. a) $f_n(x) = \dfrac{1}{n^3x^2 - 2n^2x + n + 1} \to 0$ als $n \to \infty$ (óók als $x = 0$!)
dus $(f_n)_n$ convergeert puntsgewijs met puntsgew. limiet $f \equiv 0$.

b) $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}$: $0 < f_n(x) \leq 1$
Elke f_n continu op sh $\mathbb{R}$ dus $f_n[\mathbb{R}]$ is convex (want óók sh)
$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = 1$, $f_n(x) \underset{n \to \infty}{\to} 0$
Dus $f_n[\mathbb{R}] = (0,1]$ voor elke $n \in \mathbb{N}$

c) $f_1(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2+1} = \dfrac{1}{x^2-2x+2}$. Men rekent vrij eenvoudig na dat f_1 een begrensde afgeleide heeft. Dus dus is f_1 uniform continu.

d) $d(f_n, f) = 1$ (volgt uit b)) en dus