

1. Zij $f : (X, d) \rightarrow (Y, \rho)$ een continue, bijectieve functie (met inverse g) en zij X compact.

- (i) Toon aan: $\forall A \subset X : A \text{ gesloten in } X \implies f[A] \text{ gesloten in } Y$.
(ii) Laat zien dat hieruit volgt: g is continu.

2. Zij $f_r : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ gegeven door

$$f_r(x) = (r \cos x, r \sin x) \quad (r > 0).$$

- (i) Waarom is f_r continu?

- (ii) Zij

$$C_r := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = r^2 \right\}.$$

Waarom is C_r samenhangend?

- (iii) Zij

$$D := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1 \right\}.$$

Waarom is D samenhangend?

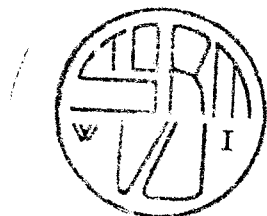
Ga na of D compact is.

- (iv) Zij $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ continu en zó dat

$$\forall (x, y) \in C_1 : g(-x, -y) = -g(x, y).$$

Waarom heeft g tenminste 1 nulpunt op D ?

Toon aan dat $g[D] = [a, b]$ voor zekere $a \leq b \in \mathbb{R}$.



Z.O.Z.

3. Zij $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ differentieerbaar op $\mathbb{R}$ en zó dat:

$$|f'(x)| \leq 4 \text{ voor elke } x \in \mathbb{R}.$$

Toon aan: f is uniform continu op $\mathbb{R}$.

4. Zij (X, d) compact en $f : (X, d) \rightarrow (Y, \rho)$ continu. Zij $(x_n)_n$ een Cauchy-rij in X .

(i) Toon aan: $(f(x_n))_n$ is een Cauchy-rij in Y .

(ii) Volgt uit het voorgaande noodzakelijk dat Y volledig is? Zo ja, toon dit aan.
Zo nee, geef een tegenvoorbeeld.

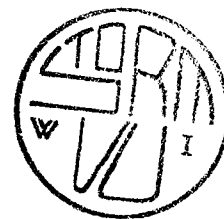
5. De functie-rij $(f_n)_n$ in $\mathcal{B}([0, 1])$ is gegeven door:

$$f_n(x) = x^n(1 - x).$$

(i) Bepaal voor elke $n \in \mathbb{N}$ het maximum van f_n op $[0, 1]$.

(ii) Toon aan: de rij $(f_n)_n$ convergeert in $\mathcal{B}([0, 1])$.

(iii) Toon aan: de rij $(f'_n)_n$ convergeert niet in $\mathcal{B}([0, 1])$.



Normering:

1 : (i) 3	2 : (i) 1	3 : 4	4 : (i) 4	5 : (i) 3
(ii) 2	(ii) 2		(ii) 3	(ii) 3
	(iii) 4			(iii) 3
	(iv) 4			
—	—	—	—	—
5	11	4	7	9

$$\text{Eindcijfer} = \frac{\# \text{ punten}}{4} + 1$$