

1. (i) Zij $A \subset X$ en willekeurige gesloten deelverz. van X .
 Daar X compact is en A gesloten in X , is A ook compact. Daar f continu is, is $f[A]$ dan ook compact in Y . Maar dan is $f[A]$ gesloten in Y .
 (ii) $g: Y \rightarrow X$ is continu als en slechts als voor iedere gesloten $F \subset X$ geldt dat $g^{-1}[F]$ gesloten is in Y . Daar $g^{-1}[F] = f[F]$ is dit precies de bewering onder (i).

2. (i) f_2 is continu omdat de beide component-functies van f_2 continu zijn (zelfs diff. baar)

(ii) $[0, 2\pi]$ is sh (want convex); f_2 is continu; dus $f_2[0, 2\pi] = C_2$ is sh.

(iii) Zij $A = [-1, +1] \times \{0\}$; dan A sh in $\mathbb{R}^2$ (sh $\times$ sh)

Daar $D = A \cup \bigcup \{C_z \mid 0 < z \leq 1\}$ sh vanwege de rozet-stelling.

D is ook compact; want gesloten en begrensd in $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$ (Heine - Borel).

(iv) Als $g(1, 0) = 0$ dan zijn we klaar.

Als $g(1, 0) \neq 0$ dan $g(1, 0)$ en $g(-1, 0)$ verschillend tekens. Daar D sh en g continu is er dan op D (zelfs op C_1) een nulpunt van g .

$g[D]$ is sh (dan convex) en compact

dan heeft $g[D]$ de vorm v/e gesloten en begrensd interval $[a, b]$ met $a \leq b$.

3. Kies x en $y \in \mathbb{R}$ met $x \neq y$. Dan is er een t tussen x en y zo dat

$$\left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| = |f'(t)| \leq 4$$

(Stelling van het gemiddelde)

Dan $\forall x, y \in \mathbb{R}$ geldt: $|f(x) - f(y)| \leq 4 \cdot |x - y|$

Kies dan, bij gegeven willek. $\varepsilon > 0$, $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$.

4. (i) X is compact, dus volledig; dus de Cauchy-rij $(x_n)_n$ convergeert in X , zeg $x_n \rightarrow p \in X$.
Daar f continu (en dus rij-continu) volgt:
 $f(x_n) \rightarrow f(p)$ in Y . Dus $(f(x_n))_n$ is een converg. rij in Y ; en dus zeker een Cauchy-rij in Y .

(ii) Nee. Voorbeeld: $X = [0, 1]$; $Y = (0, 1)$;
 $f(x) = \frac{1}{2}$ ($\forall x \in X$). Dan X compact; Y niet volledig en f zeker continu, want constant.

(i) $f'_n(x) = nx^{n-1} - (n+1)x^n = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{n}{n+1}$
Met tekenverloop f'_n volgt:
 f_n heeft max. als $x = \frac{n}{n+1}$ met waarde $\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$

(ii) De puntsgewijze limiet f v/d rij $(f_n)_n$ is de 0-functie (onderscheid de gevallen $x=1$ en $x \in [0, 1)$.)

Dan $d(f_n, f) = \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} \leq \frac{1}{n+1}$ volgt

$d(f_n, f) \rightarrow 0$ als $n \rightarrow \infty$ dus $f_n \rightarrow f$ als $n \rightarrow \infty$

(iii) $f'_n(1) = -1 \rightarrow -1$ als $n \rightarrow \infty$ en als $x \in [0, 1)$

dan $f'_n(x) = nx^{n-1} - (n+1)x^n \rightarrow 0$ als $n \rightarrow \infty$

dus elke f'_n continu, maar de puntsgewijze limiet is discontinu; dus geen (uniforme) limiet; dus geen convergentie in $B([0, 1])$.