Uitwerking 1e deeltentamen (D1) Metrische Topologie 14/2/02 I

1. Onwaar: Neem bijv. $A = \{1\}$ en $B = \{1,2\}$ ~~dan~~
$A - B = \{0,-1\}$ en dus
$\sup(A-B) = 0 \neq \sup A - \sup B = 1-2$.

2. a) $d(x,y) \geq 0$, $d(x,x) = 0$ en $d(x,y) = d(y,x)$ zijn evident. Als $d(x,y) = 0$ dan volgt $3|x-y| = 0$ of $2|x-y| = 0$ dus steeds $x = y$. Nu nog de driehoeksongelijkheid aantonen. Aldus:

(i) stel $x \neq y \neq z \neq x$ en $x, y, z \geq 0$; dan:
$$d(x,y) = 3|x-y| = 3|x-z+z-y| \leq 3|x-z| + 3|z-y| = d(x,z) + d(z,y)$$
(ii) stel $x \neq y \neq z \neq x$ en $x, y, z \leq 0$; dan analoog:
$$d(x,y) = 2|x-y| = 2|x-z+z-y| \leq 2|x-z| + 2|z-y| = d(x,z) + d(z,y)$$
(iii) stel $x \neq y \neq z \neq x$ en $x, y > 0$ en $z < 0$; dan:
$$d(x,y) = 3|x-y| \leq 3|x| + 3|y| \leq 3|x| + 2|z| + 2|z| + 3|y| =$$
$$= d(x,z) + d(z,y)$$ (en nóg een paar gevallen)

b) $B_d(3,2) = (2\frac{1}{3}, 3\frac{2}{3})$
$B_d(-2,1) = (-2\frac{1}{2}, -1\frac{1}{2})$
$B_d(0,6) = (-3, +2)$
$B_d(1,5) = (-1, 2\frac{2}{3})$

c) (i) In elke bol in de d-metriek (een open interval!) past nog een bol in de eucl. metriek met zelfde middelpt. en omgekeerd

(ii) $\{0\}$ is open in discrete metriek en niet open in de eucl. metriek en dus ook niet open in de equiv. metriek d. Dus d niet equivalent met de discrete metriek.

d) $\overline{A} = [-1, 3]$ $\overline{B} = (\leftarrow, -1] \cup [3, \rightarrow)$
$A^i = (-1, 3)$ $B^i = \emptyset$
dezelfde antwoorden als in de (equivalente!) eucl. metriek

2. e) Vervang in het domein de metriek d door de equiv. eucl. metriek $|\cdot|$ en men ziet direkt dat de identieke afbeelding continu is (in 4; en óók overal elders) Men neme, bij gegeven $\varepsilon > 0$, gewoon $\delta = \varepsilon$.

3. (i) <u>Waar</u>: Stel $Rd(A) \cap \bar{A} = \phi$. Wegens $Rd(A) \subset \bar{A}$ volgt dan $Rd(A) \cap \bar{A} = Rd(A) = \phi$. Maar dan moet $A^i = A = \bar{A}$ of wel A is clopen. Maar dan ook A^c clopen.

(ii) <u>Onwaar</u>: Neem $A = (0,1)$. Dan $A' = \bar{A} = [0,1]$ maar $A^i = A = (0,1) \neq \phi$.

(iii) <u>Waar</u>: Stel $A^i \cup A^c = \mathbb{R}$ en stel $A^i \subsetneq A$. Kies dan een $p \in A \setminus A^i$ dan $p \notin A^i$ én $p \notin A^c$ dus $p \notin A^i \cup A^c$. Dan zou $A^i \cup A^c$ nooit $\mathbb{R}$ kunnen zijn. Dus $A^i = A$, dus A is open.

(iv) <u>Waar</u>: Stel $A \subset Rd(A)$ en stel dat toch $A^i \neq \phi$. Kies dan $p \in A^i$ dan zeker $p \in A$. Maar dan $p \notin Rd(A) = \bar{A} \setminus A^i$. Dus dan kan A nooit een deel van $Rd(A)$ zijn. Tegenspraak. Dus wél $A^i = \phi$.

4. (i) Deze rij $(f_n)_n$ heeft géén puntsgewijze limiet. Bijv. $f_n(+2) = \cos((+2)^n)$ heeft géén limiet als $n \to \infty$.
Als er geen puntsgewijze limiet is, is er óók geen limiet. Dus $(f_n)_n$ <u>divergeert</u>.

(ii) Kies $x \in \mathbb{R}$. Dan $g_n(x) = \dfrac{\sin(x^n)}{1+n^2} \to 0$ als $n \to \infty$ (noemer begrensd; teller $\to \infty$)
Er is dus een puntsgewijze limiet g; en wel de 0-functie.

4. (ii) <u>Vervolg</u>: Bepaal nu $d(g_n, f)$. Aldus:

$$d(g_n, g) = \sup\{|g_n(x) - g(x)| \mid x \in \mathbb{R}\} =$$

$$= \sup\left\{\left|\frac{\sin(x^n)}{1+n^2}\right| \mid x \in \mathbb{R}\right\} = \frac{1}{1+n^2}$$

Daar $d(g_n, f) = \frac{1}{1+n^2} \to 0$ als $n \to \infty$

geldt $g_n \to g$ en dus is de rij $(g_n)_n$ <u>convergent</u>

(iii) Eerst op zoek naar de puntsgewijze limiet h.

Als $x = 0$ dan $h_n(0) = 1 \to 1$ als $n \to \infty$

Als $x \neq 0$ dan $h_n(x) = \frac{1}{1+nx^2} \to 0$ als $n \to \infty$

Er is dus een puntsgewijze limiet h, en wel

$h(0) = 1$ en $h(x) = 0$ als $x \neq 0$

Bepaal $d(h_n, h)$. Aldus:

$$d(h_n, h) = \sup\{|h_n(x) - h(x)| \mid x \in \mathbb{R}\} =$$

$$= \sup\{|h_n(x) - h(x)| \mid x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}\} =$$

$$= \sup\left\{\frac{1}{1+nx^2} \mid x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}\right\} = 1$$

Dus $d(h_n, h) \not\to 0$ als $n \to \infty$

dus $h_n \not\to h$

Dus de rij $(h_n)_n$ <u>divergent</u>.