

1. De functie $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ wordt als volgt gegeven:

$$d(x, y) = \begin{cases} 2|x - y| & \text{als } x, y \geq 0 \\ 3|x - y| & \text{als } x, y \leq 0 \\ 2|x| + 3|y| & \text{als } x > 0, y < 0 \\ 3|x| + 2|y| & \text{als } x < 0, y > 0. \end{cases}$$

- a) Toon aan: d is een metriek op $\mathbb{R}$.
(Beperk u bij de driehoeksongelijkheid tot 3 niet-triviale gevallen).
- b) Schets de volgende (open) bollen [antwoorden volstaan]:
 $B_d(2, 1)$, $B_d(-3, 2)$, $B_d(0, 6)$ en $B_d(1, 4)$.
- c) Ga na of d equivalent is met
(i) de euclidische metriek op $\mathbb{R}$;
(ii) de discrete metriek op $\mathbb{R}$.
- d) [in onderdeel d) volstaan de antwoorden].
Zij $A = \mathbb{Q}$ en $B = (1, 3]$.
Wat is in $(\mathbb{R}, d)$: $\overline{A}$, $\overline{B}$, A^i en B^i ?
- e) Zij $f : (\mathbb{R}, d) \rightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|)$ gegeven door:

$$f(x) = x.$$

Ga na of f continu/uniform continu is.



2. Zij $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven door:

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{x^3}{x^2 + y^4} & \text{als } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{als } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Zij $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 16\}$.

- (i) Ga na of f uniform continu is op A ;
(ii) Ga na of f uniform continu is op A^i .

Z.O.Z.

3. Zij $\mathbb{R}$ voorzien van de euclidische metriek en zij $A \subset \mathbb{R}$. Bewijs of weerleg:

- (i) $\text{Rd}(A) \cap \overline{A} = \emptyset \implies A^c$ is clopen;
- (ii) $A' = \overline{A} \implies A^i = \emptyset$;
- (iii) $A^i \cup A^c = \mathbb{R} \implies A^i$ is gesloten;
- (iv) $\text{Rd}(A) \supset A \implies \overline{A^c} = \mathbb{R}$;
- (v) A is samenhangend $\implies A^i$ is samenhangend;
- (vi) A^i is samenhangend $\implies A$ is samenhangend.

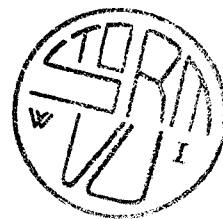
4. Zij $f : (\mathbb{R}, |\cdot|) \rightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|)$ continu, en f is niet de 0-functie.

Gegeven is dat f een oneven functie is (d.w.z. $\forall x \in \mathbb{R} : f(-x) = -f(x)$) en

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0.$$

Toon aan:

- (i) f neemt op $\mathbb{R}$ een maximum aan;
- (ii) $\exists a \in \mathbb{R} : f[\mathbb{R}] = [-a, +a]$.



5. Onderzoek de convergentie van de onderstaande rijen in $\mathcal{B}(\mathbb{R})$:

- (i) $(f_n)_n$ met $f_n(x) = \cos(\sqrt[n]{x^2})$;
- (ii) $(g_n)_n$ met $g_n(x) = \frac{\sin(x^n)}{n^2 + 1}$.

Normering:

1 : a) 3	2 : 7	3 : 12	4 : (i) 5	5 : 6
b) 3			(ii) 2	
c) 2				
d) 2				
e) 3				
13	7	12	7	6

$$\text{Eindcijfer} = \frac{\# \text{ punten}}{5} + 1$$