

1. Zij $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continu en periodiek met periode $p > 0$, dat wil zeggen:

$$\forall x \in \mathbb{R} : f(x+p) = f(x).$$

Zij $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven door

$$F(x) = f(x) - f\left(x + \frac{p}{2}\right).$$

Toon aan:

- a) $\forall x \in \mathbb{R} : F(x) = -F\left(x + \frac{p}{2}\right)$;
 - b) $\exists x \in \left[0, \frac{p}{2}\right] : F(x) = 0$;
 - c) f en F nemen op $\mathbb{R}$ allebei zowel een maximum als een minimum aan.
2. Zij (X, d) een metrische ruimte en $A, B \subset X$.
- a) Toon aan:
 - (i) Als A compact is en $U \subset X$ is open, dan is $A \setminus U$ compact;
 - (ii) Als A compact is en B is volledig, dan is $A \cap B$ compact én volledig.
 - b) Bewijs of weerleg:
 - (i) Als A samenhangend is, dan is $Rd A$ samenhangend;
 - (ii) Als A en B samenhangend en $Rd A \cap Rd B \neq \emptyset$, dan is $\overline{A} \cup \overline{B}$ samenhangend.
3. Zij d_0 de post-metrik op $\mathbb{R}$ ten opzichte van het punt 0.
- (i) Toon aan: Het inwendige van een samenhangende verzameling in $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ is weer samenhangend in $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.
 - (ii) Geldt de uitspraak onder (i) ook in $(\mathbb{R}, d_0)$?
 - (iii) Geldt de uitspraak onder (i) ook in $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$?

Bewijs of weerleg:

- (iv) Het inwendige van een compacte verzameling in $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ is weer compact in $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.
- (v) Het inwendige van een compacte verzameling in $(\mathbb{R}, d_0)$ is weer compact in $(\mathbb{R}, d_0)$.

4. Zij $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ een continue functie en zij $(u_n)_n$ een Cauchy-rij in $\mathbb{R}$.

Toon aan: de rij $(f(u_n))_n$ is een Cauchy-rij in $\mathbb{R}^3$.

5. Onderzoek beide onderstaande functie-rijen op convergentie:

(i) $(f_n)_n$ met $f_n(x) = \frac{nx-1}{nx+4}$ in $\mathcal{B}([0, 1])$;

(ii) $(g_n)_n$ met $g_n(x) = \frac{\sin nx}{nx+4}$ in $\mathcal{B}((0, 1))$.

Normering:	1a: 1	2a: 4	3: 10	4: 5	5: 6
	b: 3	b: 4			
	c: 3				
	7	8	10	5	6

$$\text{Eindcijfer} = \frac{\text{Totaal}}{4} + 1 .$$