Uitwerking 2$^e$ deeltentamen Metrische Topologie 20/4/2000 (I

1. a) $F(x+\frac{p}{2}) \underset{F}{\overset{\text{def}}{=}} f(x+\frac{p}{2}) - f(x+p) \underset{\text{period.}}{\overset{f \text{ is}}{=}} f(x+\frac{p}{2}) - f(x) =$

$= -\left( f(x) - f(x+\frac{p}{2}) \right) = -F(x)$.

b) Als $F(0)=0$ dan zijn we al klaar. Stel dan maar dat $F(0) \neq 0$. Dan volgt uit a) dat $F(\frac{p}{2}) \neq 0$ en tegengesteld teken heeft vergeleken met $F(0)$.
Daar $f$ continu is, is ook $F$ continu en uit de tussenwaarde-stelling volgt nu dat $F$ op de samenhangende (convexe) verz. $[0, \frac{p}{2}]$ tenminste 1 nulpunt heeft.

c) $f$ is periodiek met periode $p$, dus ook $F$ is periodiek met periode $p$. De continue $f$ en $F$ nemen op het compacte (gesloten + begrensd) interval $[0,p]$ zowel een max. als een min. aan. Wegens de periodiciteit is dit ook een max. en min. op heel $\mathbb{R}$.

2. a) (i) $A$ is compact dus gesloten in $X$.
$A \setminus O = A \cap O^c$ is dan ook gesloten (in $X$ én in $A$).
Als gesloten deelverz. van de compacte $A$ is $A \setminus O$ compact.

(ii) $A$ is compact dus gesloten; $B$ is volledig dus gesloten.
$A \cap B$ is dan een gesloten deelverz. v/d compacte én v/d volledige verz. dus compact én volledig (het volledig zijn volgt trouwens ook uit het compact zijn!)

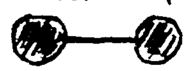
b) (i) Onwaar: $A = (0,1) \subset \mathbb{R}$ is sh. want convex
$Rd\, A = \{0,1\}$ is niet convex dus niet sh.

II

2. b) (ii) $A$ sh $\Rightarrow \bar{A}$ sh ; $B$ sh $\Rightarrow \bar{B}$ sh.
Daar $Rd(A) \subset \bar{A}$ en $Rd(B) \subset \bar{B}$ geldt zeker dat $\bar{A} \cap \bar{B} \neq \emptyset$ dus $\bar{A} \cup \bar{B}$ is óók sh (bijzonder geval v/d Rozetstelling)

3. (i) Elke sh. verz. in $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ is convex dus een 'interval'. Het inwendige hiervan is weer een 'interval' (of $\emptyset$) dus weer convex, dus sh.

(ii) Ja. Want de enige sh. deelverz$^n$ van $(\mathbb{R}, d_0)$ zijn de singletons en $\emptyset$. Het inwendige hiervan is weer een singleton of $\emptyset$, dus sh.

(iii) Nee. Het inwendige van  is onsh.

(iv) Onjuist: $[0,1]$ is compact in $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ (want gesl + begr). Het inwendige $(0,1)$ is niet compact, want niet gesloten.

(v) $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ is (óók in $(\mathbb{R}, d_0)$) een conv. rijtje incl. de limiet, dus compact. Het inwendige is $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$; dat is niet gesloten, dus niet compact.

4. $(u_n)_n$ is een Cauchy-rij in $\mathbb{R}$; dus convergent in $\mathbb{R}$ want $\mathbb{R}$ is volledig. Zeg $u_n \to p$ in $\mathbb{R}$. Dan $f(u_n) \to f(p)$ want $f$ is continu (rijtjescriterium). De rij $(f(u_n))_n$ is dus convergent; dus zeker een Cauchy-rij.

5. (i) Elke $f_n$ is continu. De puntsgew. limiet $f$ is $-\frac{1}{4}$ in $x=0$ en $1$ voor elke $x>0$. Dus $f$ is niet continu. Dus $f_n \not\rightrightarrows f$. Dus $(f_n)_n$ divergeert.

(ii) De puntsgew. limiet $g$ is de 0-functie.
$d(g_n, g) \geq \frac{\sin 1}{5}$. Dus $d(g_n, g) \not\to 0$ als $n \to \infty$ dus $g_n \not\rightrightarrows g$; dus $(g_n)$ divergeert.
(bekijk $x = 1/n$)