

1. De functies $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ zijn gegeven door

$$f(0,0) = g(0,0) = 0 \quad \text{en} \quad \text{als } (x,y) \neq (0,0) \text{ dan}$$

$$f(x,y) = \frac{x^4 + y^6}{x^6 + y^4} \quad \text{en} \quad g(x,y) = \frac{x^4 y^6}{x^4 + y^6}.$$

Onderzoek de continuïteit van f en van g in het punt $(0,0)$.

2. Zij (X, d) een compacte samenhangende metrische ruimte. De functies $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ zijn beide continu. De functie $h : X \rightarrow \mathbb{R}^2$ wordt gegeven door

$$h(x) = (f(x), g(x)).$$

Bovendien geldt: $(1, -1) \in h[X]$ en $(-1, 1) \in h[X]$.

Toon aan:

- (i) $\exists x_1 \in X : f(x_1) = g(x_1)$;
- (ii) $\exists x_2 \in X : \|h(x_2)\| = \max \{ \|h(x)\| \mid x \in X \}$.

3. De metriek d op $\mathbb{R}$ wordt gegeven door:

$$\begin{cases} d(x,y) = |x-y| & \text{als } xy \neq 0; \\ d(x,0) = d(0,x) = |x| + 2 & \text{als } x \neq 0; \\ d(0,0) = 0. \end{cases}$$

(U hoeft niet meer aan te tonen dat d inderdaad een metriek op $\mathbb{R}$ is.)

- a) (In dit onderdeel volstaan de antwoorden (ja/nee)).

Is $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ volledig?

Is $(\mathbb{R}, d)$ volledig?

Is $\mathbb{R}$ voorzien van de discrete metriek d_i volledig?

- b) $f : (\mathbb{R}, |\cdot|) \rightarrow (\mathbb{R}, d)$ wordt gegeven door $f(x) = x$;

$g : (\mathbb{R}, d_i) \rightarrow (\mathbb{R}, d)$ wordt gegeven door $g(x) = x + 1$.

Onderzoek zowel f als g op (globale) continuïteit.

Z.O.Z.

- c) Is het continue beeld van een volledige metrische ruimte altijd weer volledig?
(M.a.w.: als (X, d) een volledige metrische ruimte is, en $f : (X, d) \rightarrow (Y, \rho)$ is een continue surjectie, volgt dan noodzakelijk dat (Y, ρ) óók volledig is?)
4. (X, d) is een compacte metrische ruimte.
De functies $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ zijn uniform continu.
Toon aan: De produktfunctie $f \cdot g : X \rightarrow \mathbb{R}$ is óók uniform continu.
5. Onderzoek elk van de onderstaande functie-rijen op convergentie:
- (i) $(f_n)_n$ met $f_n(x) = \frac{x^n}{x^n + 2^n}$ in $\mathcal{B}([2, \rightarrow))$;
- (ii) $(g_n)_n$ met $g_n(x) = \frac{x^n}{x^n + 2^n}$ in $\mathcal{B}([4, \rightarrow))$.
6. Zij (X, d) een samenhangende metrische ruimte.
Zij $A \subset X$ met $A \neq \emptyset$, A open én A compact.
Toon aan: X is compact.

Normering:

1 : 6	2 : (i) 4 (ii) 4	3 : a) 3 b) 3 c) 3	4 : 3	5 : 7	6 : 3
6	8	9	3	7	3

$$\text{Eindcijfer} = \frac{\# \text{ punten}}{4} + 1$$

Het herkansingstentamen wordt afgenomen op donderdag 30 augustus van 13:30 - 16:30 uur.