Uitwerking 2e deeltentamen Metrische Topologie (D2) (I

27-03-2001

1. = $\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \to (0,0)$ als $n \to \infty$, maar

$f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = 1 \not\to f(0,0) = 0$ als $n \to \infty$

dus f is <u>niet</u> continu in $(0,0)$

= als $(x,y) \neq (0,0)$ dan $|f(x,y) - f(0,0)| = \frac{x^4 \cdot y^6}{x^4 + y^6} \leq$

$\leq x^4 \leq \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^4$. Bij willekeurige gegeven $\varepsilon > 0$

neme men dus $\delta = \sqrt[4]{\varepsilon}$, dan volgt:

als $\sqrt{x^2+y^2} < \delta$ dan $|f(x,y) - f(0,0)| < \delta^4 = \varepsilon$

(ook als $(x,y) = (0,0)$.)

Dus f is <u>wél</u> continu in $(0,0)$.

2. (i) Bekijk de functie $k(x) = f(x) - g(x)$ op X.

Daar f en g continu zijn, is ook k <u>continu</u>.

Bovendien: $\exists\, a \in X$: $f(a) = 1$ en $g(a) = -1$

$\exists\, b \in X$: $f(b) = -1$ en $g(b) = +1$

Dus $k(a) > 0$ en $k(b) < 0$.

Daar X <u>sh</u> is, is er een $x_1 \in X$: $k(x_1) = 0$.

(ii) Daar f en g beide continu zijn, is ook h continu.

Maar dan is ook de functie $x \longmapsto \|h(x)\|$ continu als samenstelling (compositie) van 2 continue functies

Op de <u>compacte</u> X neemt deze functie dus een <u>maximum</u> aan.

III

5 (ii) $g_n(x) \to 1$ als $n \to \infty$ want $x \geq 4 > 2$.

De puntsgewijze limiet g is dus constant 1.

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{x^n}{x^n+2^n} - \frac{x^n+2^n}{x^n+2^n} \right| = \frac{2^n}{x^n+2^n}$$

en dus

$$d(g_n, f) = \sup\{ |f_n(x) - f(x)| \mid x \geq 4 \} = \frac{2^n}{4^n+2^n}$$

$$= \frac{1}{2^n+1} \to 0 \text{ als } n \to \infty$$

dus $g_n \to g$ dus $(f_n)_n$ convergeert.

6. A compact in X dus gesloten in X dus A is clopen. Daar $A \neq \emptyset$ en X sh geldt $A = X$. Dus X compact.