

1. Zij  $(X, d)$  een metrische ruimte, waarin elke eindige verzameling een gesloten complement heeft.

Toon aan: De metriek  $d$  is equivalent met de discrete metriek.

2. Zij  $\mathbb{R} = A \cup B$  met  $A = [0, \rightarrow)$  en  $B = (\leftarrow, 0)$ .

De functie  $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  wordt als volgt gegeven:

$$d(x, y) = 0 \iff x = y$$

en als  $x \neq y$  dan

$$d(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{als } x, y \in A \\ 2 & \text{als } x, y \in B \\ 3 & \text{als } (x \in A \wedge y \in B) \vee (x \in B \wedge y \in A). \end{cases}$$

- (i) Laat zien dat  $d$  een metriek is op  $\mathbb{R}$ .
- (ii) Bepaal de open bollen:  $B_d(1, 1)$ ,  $B_d(-1, 3)$  en  $B_d(4, 4)$ . [Antwoorden volstaan.]
- (iii) Bepaal  $d(1, B)$  en  $d(\frac{1}{2}, \mathbb{N})$ . [Antwoorden volstaan.]
- (iv) • Ga na of  $d$  equivalent is met de euclidische metriek op  $\mathbb{R}$ .  
• Ga na of  $d$  equivalent is met de discrete metriek op  $\mathbb{R}$ .

3. Zij  $A \subset (\mathbb{R}, |\cdot|)$ . Bewijs of weerleg:

- (i)  $A' \cap \overline{A} = \emptyset \implies A$  is gesloten;
- (ii)  $A' \cap A = \emptyset \implies A$  is open;
- (iii)  $\text{Rd}A \cap A = \emptyset \implies A$  is open.

**Z.O.Z.**

4. Onderzoek elk van de onderstaande functie-rijen op convergentie:

(i)  $(f_n)_n$  met  $f_n(x) = \frac{nx^2}{n^2x + nx^2}$  in  $\mathcal{B}((0, \rightarrow))$ ;

(ii)  $(g_n)_n$  met  $g_n(x) = \frac{x^n}{x^n + 4}$  in  $\mathcal{B}([-1, +1])$ ;

(iii)  $(h_n)_n$  met  $h_n(x) = \frac{\sin^n x}{4n + 1}$  in  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ .

5. Zij  $X_1 = \mathbb{R}$ , voorzien van de postmetriek  $d_1$  (postkantoor in  $p = 1$ );

Zij  $X_2 = \mathbb{R}$ , voorzien van de postmetriek  $d_2$  (postkantoor in  $p = 2$ ).

Onderzoek in de produktruimte  $(X_1, d_1) \times (X_2, d_2)$  de convergentie van de rijtjes:

(i)  $(\underline{x}_n)_n$  met  $\underline{x}_n = (1 + \frac{1}{n}, 2 - \frac{1}{n})$ ;

(ii)  $(\underline{y}_n)_n$  met  $\underline{y}_n = (2 - \frac{1}{n}, 2)$ .

### Normering:

|       |           |       |       |       |
|-------|-----------|-------|-------|-------|
| 1 : 5 | 2 : (i) 3 | 3 : 8 | 4 : 8 | 5 : 5 |
|       | (ii) 2    |       |       |       |
|       | (iii) 2   |       |       |       |
|       | (iv) 3    |       |       |       |
| <hr/> | <hr/>     | <hr/> | <hr/> | <hr/> |
| 5     | 10        | 8     | 8     | 5     |

$$\text{Eindcijfer} = \frac{\# \text{ punten}}{4} + 1$$

Het tweede deeltentamen  $D_2$  wordt afgenomen op dinsdag 27 maart 2001.