Uitwerking eerste deeltentamen Metrische Topologie (D1) 15/2/'07 I

1. Zij $p \in X$ willekeurig. Dan heeft de verz. $X \setminus \{p\}$ een eindig komplement; dus $X \setminus \{p\}$ is gesloten; dus $\{p\}$ is open. Dus elke singleton-verz. in X is open; dus élke verz. in (X, d) is open (als vereniging van singletons). Aangezien in de discrete metriek ook élke deelverz. open is, brengen beide metrieken dezelfde topologie (open verz^n) voort, en zijn dus equivalent.

2. (i) $d(x,y) \geq 0$ evident (0 of 1 of 2 of 3); $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ is gegeven; $d(x,y) = d(y,x)$ is ook evident.
Blijft over te bewijzen de driehoeksongelijkheid. Aldus:
Zij $x \neq y \neq z \neq x$.
Aangezien $d(x,z) + d(z,y) \geq 2$ voor elke x, y, z valt er niets meer te bewijzen als $x, y \in A$ of $x, y \in B$.
Blijft over het geval met $d(x,y) = 3$ dus (z.b.d.a.) met $x \in A$ en $y \in B$. Als nu $z \in A$ dan $d(x,z) + d(z,y) = 1 + 3 = 4$
Als nu $z \in B$ dan $d(x,z) + d(z,y) = 3 + 2 = 5$; dus O.K.

(ii) $B_d(1,1) = \{1\}$ $\quad B_d(-1,3) = B$ $\quad B_d(4,4) = \mathbb{R}$

(iii) $d(1, B) = 3$ $\quad d(+\frac{1}{2}, \mathbb{N}) = 1$.

(iv)
- $\{1\}$ is open in $(\mathbb{R}, d)$ (want een open bol)
  $\{1\}$ is niet open in $(\mathbb{R}, |\cdot|)$
  Dus d is niet equivalent met de euclidische metriek
- $\forall p \in \mathbb{R}$ geldt $B_d(p, \frac{1}{2}) = \{p\}$ dus elke singleton in $(\mathbb{R}, d)$ is open; dus elke verz in $(\mathbb{R}, d)$ is open; dus equivalent met de discrete metriek (zie de redenering bij som 1)

(II

Waar:

3. (i) Stel $A' \cap \bar{A} = \phi$. Daar $A' \subset \bar{A}$ volgt dan $A' = \phi$.
Dus geldt: $\bar{A} = A \cup A' = A \cup \phi = A$
Dus $A = \bar{A}$ dus A is gesloten.

(ii) Onwaar: Neem $A = \{1\}$. Dan $A' = \phi$ dus $A \cap A' = \{1\} \cap \phi = \phi$. Echter: $\{1\}$ is niet open

(iii) Waar: Zij $p \in A$ willekeurig. Dus $p \notin Rd(A)$. Dus er is een omgeving U van p die niet zowel A als A^c snijdt.
Daar $p \in U \cap A$ moet wel gelden $U \subset A$; dus p is inwendig pt van A.

4. (i) We bepalen eerst de puntsgew. limiet f: Kies $x > 0$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{nx^2}{n^2x+nx^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{x^2}{nx+x^2} = 0. \quad \text{Dus } f \equiv 0.$$

Echter $d(f_n, f) = \sup\left\{\frac{nx^2}{n^2x+nx^2} \,\middle|\, x>0\right\} =$

$= \sup\left\{\frac{x}{n+x} \,\middle|\, x>0\right\} = 1 \not\to 0$ als $n \to \infty$ dus $f_n \not\to f$

Dus de rij $(f_n)_n$ divergeert.

(ii) $\lim_{n\to\infty} g_n(-1) = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{(-1)^n+4}$ bestaat niet.

Er is dus niet eens een puntsgewijze limiet; laat staan een limiet.
Dus de rij $(g_n)_n$ divergeert.

(iii) De puntsgewijze limiet h is hier weer de 0-functie; want voor elke $x \in \mathbb{R}$: $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin^n x}{4n+1} = 0$

$$d(h_n, h) = \sup\left\{ \left|\frac{\sin^n x}{4n+1}\right| \,\middle|\, x \in \mathbb{R}\right\} = \frac{1}{4n+1}$$

dus $d(h_n, h) = \frac{1}{4n+1} \to 0$ als $n \to \infty$

dus $h_n \to h$ als $n \to \infty$

Dus de rij $(h_n)_n$ convergeert.

5. Omdat we werken in een produktruimte is er alleen dan sprake van convergentie als beide coördinaatrijtjes convergeren in (X_1, d_1) resp (X_2, d_2)
Welnu:

$1 + \frac{1}{n} \to 1$ in (X_1, d_1)

$2 - \frac{1}{n} \not\to 2$ in (X_1, d_1) (is zelfs divergent)

$2 - \frac{1}{n} \to 2$ in (X_2, d_2)

Hieruit volgt:

(i) $\underline{x}_n \to (1, 2)$ dus $(\underline{x}_n)_n$ convergeert

(ii) $(\underline{y}_n)_n$ divergeert omdat de eerste coördinaatrij divergeert.