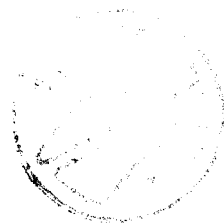


1. Zij $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven door:

$$d(x, y) := \begin{cases} |x - y| & \text{als } x, y \geq 0 \\ 1 & \text{als } x, y \leq 0 \text{ en } x \neq y \\ 0 & \text{als } x = y \\ 1 + |x| & \text{als } x > 0 \text{ en } y < 0 \\ 1 + |y| & \text{als } x < 0 \text{ en } y > 0. \end{cases}$$



a) Toon aan dat d een metriek is op $\mathbb{R}$.
(Beperk u bij de driehoeksongelijkheid tot 2 niet-triviale gevallen.)

b) Schets de volgende bollen in $(\mathbb{R}, d)$:

$$B(0, 2); B\left(-\frac{1}{2}, 1\right); B\left(+\frac{1}{2}, 1\right).$$

c) Is $\mathbb{R}$ compact? Samenhangend?

Is $[-1, 0]$ compact? Samenhangend?

Is $[0, 1]$ compact? Samenhangend?

(Alle 6 vragen met betrekking tot de metriek d .)

d) Zij $f : (\mathbb{R}, d) \rightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|)$ gegeven door

$$f(x) = x^2.$$

Is f continu? Uniform continu?

Zelfde vragen voor de functie $g : (\mathbb{R}, |\cdot|) \rightarrow (\mathbb{R}, d)$ gegeven door

$$g(x) = x^2.$$

(Antwoorden bij d) volstaan).

2. a) Zij (X, d) een metrische ruimte en $p \in X$.

Zij $g : (X, d) \rightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|)$ als volgt gegeven:

$$g(x) = d(x, p).$$

Toon de volgende (bekende) bewering aan:

g is uniform continu op X .

b) $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ zijn voorzien van de gebruikelijke metriek en

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 y^2 \leq 1\};$$

Laat verder $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven zijn door

$$f((x, y)) = \max \{|x - 2|, |y - 3|\}.$$

(i) Is A compact?

(ii) Is $A \cap ([0, 14] \times [0, 14])$ compact?

(iii) Licht toe dat f op A een minimum aanneemt.

3. Zij $\mathbb{R}$ voorzien van de gewone metriek.

Zij $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continu.

Bovendien geldt: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$, dat wil zeggen :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists M, N \in \mathbb{R} : [x > M \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon] \text{ en } [x < N \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon] .$$

- a) Bewijs of weerleg: f neemt op $\mathbb{R}$ een maximum aan.
- b) Toon aan: Als $f(0) = 10$ dan neemt f op $\mathbb{R}$ een maximum aan.

Zij $A := \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > x\}$ en $B := \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) < x\}$.

- c) Toon aan: A en B zijn open in $\mathbb{R}$.
- d) Toon aan: $\exists x > 0 : f(x) < x$;
 $\exists x < 0 : f(x) > x$.
- e) Toon aan: f heeft een dekpunt, dat wil zeggen:

$$\exists x \in \mathbb{R} : f(x) = x .$$

4. Zij $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven door:

$$f(x, y) = (x - y)(x^2 + y^2 - 1)x .$$

- a) Licht toe, waarom f continu is.
- b) Schets in $\mathbb{R}^2$ de nulpuntsverzameling Z van f
(dus $Z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = 0\}$) en schets bovendien in $\mathbb{R}^2$ het tekenverloop van f .
- c) Zij $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1 \wedge x \geq 0 \wedge y \geq x\}$.
Is D compact? Is D^i compact?
- d) Licht toe, waarom f op D^i een maximum aanneemt.

5. Zij $f_n(x) = \frac{nx}{nx^2 + 1}$ ($n \in \mathbb{N}$; $x \geq 0$) .

- (i) Bepaal de puntsgewijze limiet van de rij $(f_n)_n$;
- (ii) Convergeert de rij $(f_n)_n$ in $\mathcal{B}([0, \infty))$; in $\mathcal{B}((0, \infty))$; in $\mathcal{B}([a, \infty))$ met $a > 0$?

Normering:	1a: 3	2a: 3	3a: 2	4a: 1	5: 8
	b: 3	b: 6	b: 3	b: 2	
	c: 3		c: 1	c: 2	
	d: 2		d: 2	d: 2	
			e: 2		
	11	9	10	7	8

$$\text{Eindcijfer} = \frac{\text{Totaal}}{5} + 1 .$$