Uitwerking Tentamen Metrische Topologie 21/8/00 (I

1\. a) $d(x,y) \geq 0$, $d(x,x) = 0$ en $d(x,y) = d(y,x)$ evident.
als $d(x,y) = 0$ dan $x = y$ of $|x-y| = 0$, maar dan óók $x = y$ (bedenk dat $1+|x| > 0$ en $1+|y| > 0$).
Nu nog de driehoeksongelijkheid: zij $x \neq y \neq z \neq x$.
– als $x, y, z \geq 0$ dan is $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$
want $|x-y| \leq |x-z| + |z-y|$.
– als $x, y, z \leq 0$ dan is $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$
want $1 \leq 1 + 1$.
– als $x, y < 0$ en $z \geq 0$ dan is $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$
want $1 \leq 1+|z| + 1+|z|$
etc., etc.

b) – $B(0,2) = (\leftarrow, 2)$; $B(-\frac{1}{2}, 1) = \{-\frac{1}{2}\}$; $B(+\frac{1}{2}, 1) = [0, 1\frac{1}{2})$.

c) $\mathbb{R}$ niet compact, want niet begrensd ; $\mathbb{R}$ niet sh : $\{-\frac{1}{2}\}$ is clopen.
$[-1, 0]$ noch compact, noch samenhangend : de relatieve metriek is de discrete metriek.
$[0, 1]$ compact en samenhangend : de relatieve metriek is de euclidische metriek.

d) f is wél continu, maar niet uniform continu
g is óók continu, en óók niet uniform continu
(want g komt uit in $\mathbb{R}^+$ en dat heeft ook t.o.v. d de gewone metriek)

2\. a) $g(x) = d(x,p) \leq d(x,y) + d(y,p) = d(x,y) + g(y)$.
Evenzo: $g(y) \leq d(x,y) + g(x)$.
Dus: $|g(x) - g(y)| \leq d(x,y)$.
Bij willek. $\varepsilon > 0$ kunnen we dus $\delta = \varepsilon$ nemen.
Immers: $\forall x, y$ met $d(x,y) < \delta = \varepsilon$ geldt
$|g(x) - f(y)| \leq d(x,y) < \varepsilon$.

b) (i) A niet compact want niet begrensd
(assenkruis is deel van A)
(ii) $A \cap ([0,14] \times [0,14])$ is zeker begrensd.
Ook gesloten want A is gesloten (inverse beeld van $(\leftarrow, 1]$ onder de continue functie x^2y^2)
en $[0,14] \times [0,14]$ is ook gesloten. Dus compact.

II

2. b) (iii) Voorzie $\mathbb{R}^2$ van de aequiv. metriek d'' dan is $f((x,y)) = d''((x,y),(2,3))$.
Volgens a) neemt f (continu!) op de compacte $A \cap [0,14] \times [0,14]$ een minimum aan.
Dit is ook het minimum op héél A want buiten $[0,14] \times [0,14]$ is f tenminste 2 en het minimum is ≤ 2 (vul (1,1) maar in)

---

3. a | weerlegging: bekijk de functie $f(x) = -e^{-|x|}$

b | Zoek $M, N \in \mathbb{R}$ zodat $\forall x > M : |f(x)| < 1$ $\forall x < N, |f(x)| < 1$
Dan neemt f zyn eventuele maximum niet aan $(-\infty, N) \cup (M, \infty)$
(want $\forall x \in (-\infty, N) \cup (M, \infty) : f(x) < f(0) = 10$)
Op $[N, M]$ neemt f een maximum aan, want $[N, M]$ is compact
Dit maximum is ≥ 10, en dus een maximum op $\mathbb{R}$

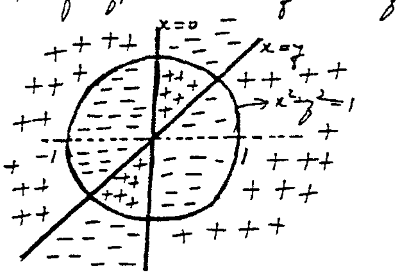
c | Zet $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - x$. Dan is g continu
$(-\infty, 0)$ is open in $\mathbb{R}$, dus $B = g^{-1}((-\infty, 0))$ is open in $\mathbb{R}$
$(0, \infty)$ is open in $\mathbb{R}$, dus $A = g^{-1}((0, \infty))$ is open in $\mathbb{R}$

d | Zoek $M \in \mathbb{R}$ zodat $\forall x > M : |f(x)| < 1$.
Dan voor alle $x > \max\{1, M\}$: $f(x) - x < 0$ dus $f(x) < x$
Zoek $N \in \mathbb{R}$ zodat $\forall x < N : |f(x)| < 1$
Dan voor alle $x < \min\{-1, N\}$: $f(x) - x > 0$ dus $f(x) > x$.
(Het is duidelyk dat er altyd $a, b \in \mathbb{R}$ zyn zodat $a > \max\{1, M\}$, $b < \min\{-1, N\}$).

e | A en B zyn open, disjuncte, niet-lege delen van $\mathbb{R}$.
Omdat $\mathbb{R}$ samenhangend is weten we $A \cup B \neq \mathbb{R}$.
Dus bestaat er een $x \in \mathbb{R} \setminus (A \cup B)$ en voor die x hebben we $f(x) = x$ (of $g(x) = 0$).
Dus heeft f een dekpunt.

4. a) $P_1(x,y) = x$ en $P_2(x,y) = y$ (de projecties) zijn continue functies (is bewezen!). f wordt uit P_1 en P_2 verkregen door opt., aftr. en verm. dus f is óók continu

b) $f(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y \vee x^2+y^2 = 1 \vee x = 0$, dus:



Z wordt dus aangegeven door de dik-getekende lijnen en de eenheidscirkel

c) D is gesloten als doorsnede van 3 gesloten verz.:
$\{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq 1\} \cap \{(x,y) \mid x \geq 0\} \cap \{(x,y) \mid y \geq x\}$
D is evident begrensd (binnen eenheidscirkel)
dus D is compact (in $\mathbb{R}^2$)
D^i is niet gesloten, dus niet compact

d) f neemt op D een max. aan want f continu en D compact. Aangezien dat max. zeker niet 0 is, wordt dat max. aangenomen in een pt. van D^i. Dat is dan zeker het max. van f op D^i.

5. (i) $f_n(0) = 0 \to 0$ als $n \to \infty$. Als $x > 0$:
$$f_n(x) = \frac{nx}{nx^2+1} = \frac{x}{x^2+\frac{1}{n}} \to \frac{1}{x} \text{ als } n \to \infty$$
Dus $f(0) = 0$ en $f(x) = \frac{1}{x}$ als $x > 0$

(ii) - In $B([0,\infty))$: elke f_n is continu; f is niet continu; dus $f_n \not\to f$; dus $(f_n)_n$ convergeert niet.

- In $B((0,\infty))$: de puntsgewijze limiet is niet begrensd, dus $f \notin B((0,\infty))$; dus $f_n \not\to f$ dus $(f_n)_n$ convergeert niet.
Anders: $|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{nx}{nx^2+1} - \frac{1}{x}\right| =$
$= \left|\frac{nx^2}{(nx^2+1)x} - \frac{nx^2+1}{(nx^2+1)x}\right| = \frac{1}{x(nx^2+1)} = \frac{\sqrt{n}}{2}$ als $x = \frac{1}{\sqrt{n}}$
dus $d(f_n, f) \not\to 0$ dus $f_n \not\to f$.

- In $B([a,\infty))$: daar $x \geq a$:
$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{x(nx^2+1)} \leq \frac{1}{a(na^2+1)}$$
dus $d(f_n, f) \leq \frac{1}{a(na^2+1)} \to 0$ als $n \to \infty$
dus $f_n \to f$.