

1. Zij $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ als volgt gegeven:

$$d(x, y) := \begin{cases} 0 & \text{als } x = y \\ 2|x| + 2|y| & \text{als } x \neq y \end{cases}.$$

- (i) Toon aan dat d een metriek op $\mathbb{R}$ is.
- (ii) Toon aan: $\forall p \neq 0$ geldt: $\{p\}$ is open in $(\mathbb{R}, d)$.
- (iii) Bepaal in $(\mathbb{R}, d)$ inwendige en afsluiting van $[0, 1)$ en van $[-1, +1]$.
(Antwoorden volstaan in dit onderdeel (iii).)
- (iv) Onderzoek de rijen $\left(\frac{1}{n}\right)_n$ en $\left(\frac{n+1}{n}\right)_n$ in $(\mathbb{R}, d)$ op convergentie.
- (v) Ga na of de functie $f : (\mathbb{R}, |\cdot|) \rightarrow (\mathbb{R}, d)$, gegeven door $f(x) = x$, continu is in de punten 0 en 1.

2. Zij $X \neq \emptyset$ en d_1 en d_2 metrieken op X waarvoor geldt:

$$\forall x, y \in X : d_1(x, y) \leq d_2(x, y).$$

- a) Toon aan:
 - (i) $\forall x \in X \quad \forall r > 0 : B_{d_2}(x, r) \subset B_{d_1}(x, r)$.
 - (ii) Als U open is in (X, d_1) , dan is U ook open in (X, d_2) .
- b) Als bovendien geldt dat:

$$\forall x, y \in X : d_2(x, y) \leq 2d_1(x, y)$$

laat dan zien dat d_1 en d_2 equivalente metrieken op X zijn.

3. Zij $A \subset (\mathbb{R}, |\cdot|)$.

Bewijs of weerleg:

- (i) A' is gesloten $\Rightarrow A$ is clopen;
- (ii) $A' \subset A^c \Rightarrow$ elke $p \in A$ is geïsoleerd punt van A ;
- (iii) $Rd(A) = \overline{A} \Rightarrow A$ heeft geen inwendige punten.

Z.O.Z.

4. Onderzoek elk van de onderstaande functie-rijen op convergentie:

(i) $(f_n)_n$ met $f_n(x) = \frac{nx}{n^2x^2 + 1}$ in $\mathcal{B}(\mathbb{R})$;

(ii) $(g_n)_n$ met $g_n(x) = \frac{\cos nx}{n(x+2)}$ in $\mathcal{B}((0, \rightarrow))$;

(iii) $(h_n)_n$ met $h_n(x) = (\tan(x))^n$ in $\mathcal{B}\left(\left[0, \frac{\pi}{3}\right]\right)$.

Normering:	1(i): 3	2a: 4	3: 8	4: 8
	(ii): 2	b: 3		
	(iii): 2			
	(iv): 3			
	(v): 3			
	13	7	8	8

$$\text{Eindcijfer} = \frac{\text{Totaal}}{4} + 1 .$$