Uitwerking 1e deeltentamen (D1) Metrische Topologie 9/3/2000 (I

1. (i) $d(x,y) \geq 0$, $d(x,x) = 0$ en $d(x,y) = d(y,x)$ zijn evident.
Als $x \neq y$ dan $2|x| + 2|y| > 0$ daar x of y dan niet 0 is.
Tenslotte: zij $x \neq y \neq z \neq x$. Dan:
$d(x,y) = 2|x| + 2|y| \leq 2|x| + 2|z| + 2|z| + 2|y| = d(x,z) + d(z,y)$.

(ii) Zij $p \neq 0$. Dan $|p| > 0$. Voor elke $x \neq p$ geldt dan:
$d(x,p) = 2|x| + 2|p| > |p|$. Dus $B_d(p,|p|) = \{p\}$.
Dus $\{p\}$ is een open bol en is dus open.

(iii) Zij $A = [0,1)$ dan $A^i = (0,1)$ en $\bar{A} = [0,1)$.
Zij $B = [-1,+1]$ dan $B^i = B$ en $\bar{B} = B$

(iv) $d(0, \frac{1}{n}) = \frac{2}{n} \to 0$ als $n \to \infty$ dus $\frac{1}{n} \to 0$ in $(\mathbb{R}, d)$
$d(1, 1+\frac{1}{n}) = 2 + 2 + \frac{2}{n} \not\to 0$ als $n \to \infty$ dus
$\frac{n+1}{n} \not\to 1$ in $(\mathbb{R}, d)$ (en ook niet naar enig ander punt, daar $d(1+\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{m}) \geq 4$ als $n \neq m$, dus de termen liggen onderling te veel uiteen om te kunnen convergeren)

(v) • in 0: $|x - 0| = |x|$ en $d(f(x), f(0)) = d(x,0) = 2|x|$ als $x \neq 0$
dus als $|x-0| < \frac{\varepsilon}{2}$ dan $d(f(x), f(0)) < \varepsilon$
Men neme, bij gegeven $\varepsilon > 0$, dus $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$
f is dus continu in $x = 0$.

• in 1: $\{1\}$ is (in $(\mathbb{R}, d)$) een omgeving van 1.
$f^{-1}[\{1\}] = \{1\}$ is (in $(\mathbb{R}, |\cdot|)$) echter geen omgeving van 1. f is dus niet continu in $x = 1$.

2. a) (i) Kies willek. $x \in X$ en willek. $r > 0$.
Zij $y \in B_{d_2}(x,r)$ gegeven. Dan $d_2(y,x) < r$.
Wegens $d_1(x,y) \leq d_2(x,y)$ geldt dan zeker:
$d_1(x,y) < r$. Dus $y \in B_{d_1}(x,r)$.

(ii) Zij U open in (X, d_1). Zij $p \in U$ willek. gegeven.
Dan $\exists r > 0 : B_{d_1}(p,r) \subset U$ want U is

open in (X, d_1). Volgens (i) geldt dan:
$B_{d_2}(p, r) \subset B_{d_1}(p, r) \subset U$. Dus $B_{d_2}(p, r) \subset U$.
Dus p inwendig pt van U in (X, d_2). Dus U ook open in (X, d_2).

2. b) Op dezelfde wijze als bij a(i) bewijst men dat nu ook geldt:

$$\forall x \in X \ \forall r > 0 : B_{d_1}(x, \tfrac{1}{2}r) \subset B_{d_2}(x, r).$$

Dus binnen iedere bol in (X, d_1) past nog wel een bol in (X, d_2) met zelfde middelpt. en omgekeerd, dus (Stelling!): d_1 en d_2 zijn equivalente metrieken.

3. (i) <u>Onwaar</u>: Neem $A = \mathbb{Q}$ dan $A^i = \mathbb{Q}^i = \phi$ dus gesloten maar $\mathbb{Q}$ is noch open, noch gesloten, dus zeker niet clopen.

(ii) <u>Waar</u>: Elke $p \in A$ is dus géén verdichtingspunt van A dus geïsoleerd punt van A.

(iii) <u>Waar</u>: We weten: $Rd\, A = \overline{A} \setminus A^i$. Als nu óók nog geldt $Rd\, A = \overline{A}$ dan moet wel $A^i = \phi$ (daar $A^i \subset \overline{A}$). Dus A heeft geen inwendige punten.

4. (i) als $x = 0$ dan $f_n(x) = f_n(0) = 0 \longrightarrow 0$ als $n \to \infty$

als $x \neq 0$ dan $f_n(x) = \dfrac{nx}{n^2x^2+1} = \dfrac{x}{nx^2 + \frac{1}{n}} \to 0$ als $n \to \infty$

$(f_n)_n$ is dus zeker puntsgewijs convergent met puntsgewijze limiet $f \equiv 0$. Echter:

$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}$ dus $d(f_n, f) \geq \dfrac{1}{2}$

Dus $f_n \not\to f$. Dus $(f_n)_n$ divergent.

4. (ii) $\forall x > 0$: $g_n(x) = \dfrac{\cos nx}{n(x+2)} \to 0$ als $n \to \infty$.

Dus $(g_n)_n$ is zeker puntsgewijs convergent met puntsgewijze limiet $g \equiv 0$. Vervolgens:

$d(g_n, g) = \sup \{ |g_n(x) - f(x)| \mid x > 0 \} =$

$= \sup \left\{ \left| \dfrac{\cos nx}{n(x+2)} \right| \mid x > 0 \right\} = \dfrac{1}{2n} \to 0$ als $n \to \infty$

Dus $g_n \to g$. Dus $(g_n)_n$ is convergent.

(iii) $h_n\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^n = (\sqrt{3})^n \to \infty$ als $n \to \infty$

dus $(h_n)_n$ is niet eens puntsgewijs convergent.

Dus $(h_n)_n$ is divergent.