

1. Zij $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven door

$$d(x, y) := \begin{cases} 0 & \text{als } x = y \\ |x| + |x - y| + |y| & \text{als } x \neq y. \end{cases}$$

a) Toon aan: d is een metriek op $\mathbb{R}$.

b) Bewijs: $\forall p \in \mathbb{R}$ geldt:

$$p \neq 0 \Leftrightarrow \{p\} \text{ is open in } (\mathbb{R}, d).$$

c) Is d equivalent met de euclidische metriek op $\mathbb{R}$?

Is d equivalent met de postmetriek d_0 (t.o.v. het punt 0) op $\mathbb{R}$?

d) Bepaal in $(\mathbb{R}, d)$ afsluiting en inwendige van $A = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ en van $B = (-1, +1)$.

(Antwoorden bij d) volstaan.)

e) Zij $f : (\mathbb{R}, d) \rightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|)$ gegeven door $f(x) = x$;

Zij $g : (\mathbb{R}, |\cdot|) \rightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|)$ gegeven door $g(x) = \cos x$;

Zij $h : (\mathbb{R}, d) \rightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|)$ gegeven door $h(x) = \cos x$.

(i) Ga na of f continu is;

(ii) Waarom is g continu;

(iii) Ga na of h continu is.

2. a) Zij (X, d) een metrische ruimte en zij $\mathbb{Q}$ voorzien van de natuurlijke metriek.

Toon aan: X is samenhangend $\Leftrightarrow$ iedere continue functie $f : X \rightarrow \mathbb{Q}$ is constant.

b) Zij (X, d) compact en (Y, d_1) een metrische ruimte.

Toon aan:

(i) d is een begrensde metriek;

(ii) als elk punt in X een eindige omgeving heeft, dan is X zelf óók eindig;

(iii) als $f : X \rightarrow Y$ continu is en $(x_n)_n$ is een rij in X zó dat $f(x_n) \rightarrow y$ voor zekere $y \in Y$, dan is er een $x \in X$ zó dat $y = f(x)$.

3. a) Toon aan: als $X \times Y$ ($Y \neq \emptyset$) volledig is, dan is ook X volledig.

b) Zij X volledig en $f : X \rightarrow X$ continu.

Zij $a \in X$ en de rij $(x_n)_n$ in X gegeven door $x_1 = a$ en $x_{n+1} = f(x_n)$ ($n \in \mathbb{N}$).

Toon aan: als $(x_n)_n$ een Cauchy-rij is, dan heeft f tenminste 1 dekpunt.

4. a) Onderzoek de convergentie van de volgende functierijen:

(i) $(f_n)_n$ met $f_n(x) = \frac{e^x}{x^n}$ in $\mathcal{B}([1, 100])$;

(ii) $(g_n)_n$ met $g_n(x) = \frac{e^x}{(1+x)^n}$ in $\mathcal{B}([1, 100])$;

(iii) $(h_n)_n$ met $h_n(x) = \begin{cases} 1 - \frac{|x|}{n} & \text{als } |x| < n \\ 0 & \text{als } |x| \geq n \end{cases}$ in $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

b) Geef in $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ een rij functies $(f_n)_n$ zó dat geen enkele f_n continu is in 0, maar zó dat $f_n \rightarrow f$ met f continu.

5. Zij $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven door

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{als } (x, y) = (0, 0) \\ \frac{x^4}{x^2 + 2y^2} & \text{als } (x, y) \neq (0, 0) \end{cases}.$$

a) Ga na of f continu is in $(0, 0)$.

b) Ga na of f uniform continu is op $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$.

1a: 3	2a: 4	3a: 3	4a: 6	5a: 3
1b: 3	2b: 6	3b: 3	4b: 3	5b: 3
1c: 3				
1d: 2				
1e: 3				
14	10	6	9	6

$$\text{Eindcijfer} = \frac{\text{Totaal}}{5} + 1.$$