

1. Zij $A \subset \mathbb{R}$ begrensd en oneindig.

Bewijs of weerleg:

$$(i) \quad \sup A = \sup (A \cup \{\sup A\}) ;$$

$$(ii) \quad \sup A = \sup (A \setminus \{\sup A\}) ;$$

$$(iii) \quad \overline{A} = A' \cup \overline{A} .$$

2. Zij $\mathbb{R}$ voorzien van de volgende metriek d :

$$d(x, y) := \begin{cases} |x - y| , & \text{als } x, y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \\ |x - y| + 1, & \text{als } x \in \mathbb{Z} \text{ en } y \notin \mathbb{Z} \\ |x - y| + 1, & \text{als } x \notin \mathbb{Z} \text{ en } y \in \mathbb{Z} \\ |x - y| + 2, & \text{als } x, y \in \mathbb{Z} \text{ en } x \neq y. \end{cases}$$

$$d(x, x) = 0 \quad \text{voor alle } x \in \mathbb{R}.$$

- Toon aan dat d inderdaad een metriek op $\mathbb{R}$ is.
(Beperk u bij de driehoeksongelijkheid tot 3 niet-triviale gevallen.)
- Bepaal de gesloten bol $D(3, 3)$ en bepaal $d(\pi, \mathbb{Z})$.
- Ga na of d equivalent is met de euclidische metriek op $\mathbb{R}$.
- Ga na of $(\mathbb{R}, d)$ compact/samenhangend is.

3. Zij X een verzameling en laten d_1 en d_2 metrieken zijn op X met

$$d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \quad (\forall x, y \in X) .$$

- Toon aan: als O open in (X, d_1) dan O ook open in (X, d_2) .
- Bewijs of weerleg:
 - (X, d_2) compact $\Rightarrow (X, d_1)$ compact ;
 - (X, d_1) ontsamenhangend $\Rightarrow (X, d_2)$ ontsamenhangend ;
 - $A \subset X$ ligt dicht in $(X, d_1) \Rightarrow A$ ligt dicht in (X, d_2) .
- Toon aan: als $x_n \rightarrow x$ in (X, d_2) dan ook $x_n \rightarrow x$ in (X, d_1) .
- Toon aan: als $f : X \rightarrow Y$ continu is m.b.t. d_1 op X , dan f ook continu m.b.t. d_2 op X .

e) Zij nu $X = \mathbb{R}^2$ en d_a de amazone-metrik.

Toon aan:

(i) $[0, 1] \times [0, 1]$ is gesloten in $(\mathbb{R}^2, d_a)$;

(ii) $\left(\left(\frac{1}{n}, 1\right)\right)_n$ is niet convergent in $(\mathbb{R}^2, d_a)$;

(iii) $f : (\mathbb{R}^2, d_a) \rightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|)$ gegeven door $(x, y) \rightarrow x + y$ is continu.

4. a) Zij (X, d) een metrische ruimte en $p \in X$.

Zij $g : (X, d) \rightarrow \mathbb{R}$ als volgt gegeven:

$$g(x) = d(x, p).$$

Toon aan: g is uniform continu op X .

b) $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ zijn voorzien van de gebruikelijke metrik en

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 y^2 \leq 1\};$$

Laat verder $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven zijn door

$$f((x, y)) = \max \{|x - 2|, |y - 3|\}$$

(i) Is A compact?

(ii) Is $A \cap ([0, 14] \times [0, 14])$ compact?

(iii) Licht toe dat f op A een minimum aanneemt.

5. Zij X een metrische ruimte en Y de reële rechte voorzien van de post-metrik d_0 t.o.v. $0 \in Y$.

Zij $f : X \rightarrow Y$ een continue afbeelding.

Toon aan:

a) Als X samenhangend is, dan is f constant;

b) Als X compact is, dan is $f[X]$ eindig of $0 \in f[X]$.

Normering:	1: 5	2a: 3	3a: 2	4a: 3	5a: 3
		b: 3	b: 4	b: 7	b: 3
		c: 2	c: 2		
		d: 2	d: 2		
			e: 4		
	5	10	14	10	6

$$\text{Eindcijfer} = \frac{\text{Totaal}}{5} + 1.$$