



1. (i) Waar: Uiteraard is $\sup A$ het grootste element van $A \cup \{\sup A\}$. Dus:

$$\sup(A \cup \{\sup A\}) = \max(A \cup \{\sup A\}) = \sup A.$$

(ii) Onwaar: Zij $A = [0, 1] \cup \{2\}$. Dan $\sup A = 2$, maar $\sup(A \setminus \{\sup A\}) = \sup [0, 1] = 1$.

(iii) Waar: volgt direct uit $A' \subset A^-$.

2. a) $d(x, y) \geq 0$ triviaal; $d(x, y) = d(y, x)$ eveneens want $|x - y| = |y - x|$; $d(x, x) = 0$ is gegeven.

als $d(x, y) = 0$ dan moet wel gelden $d(x, y) = 0 = |x - y|$, dus $x = y$. Nu nog de driehoeksongelijkheid:

- als $x, y, 2 \notin \mathbb{Z}$ dan is het de gewone Δ 's ongelijkheid

- als $x, y \notin \mathbb{Z}$ en $2 \in \mathbb{Z}$ dan:

$$d(x, y) = |x - y| \leq |x - 2| + |2 - y| < |x - 2| + 1 + |2 - y| + 1 = d(x, 2) + d(2, y)$$

- als $x, y, 2 \in \mathbb{Z}$ dan

$$d(x, y) = |x - y| + 2 \leq |x - 2| + |2 - y| + 2 \leq |x - 2| + 2 + |2 - y| + 2 = d(x, 2) + d(2, y)$$

(steeds $x \neq y \neq 2 \neq x$ verondersteld)

b) $D(3, 3) = \{x \in \mathbb{R} \mid d(x, 3) \leq 3\} = (1, 5)$
(let op: de punten 1 en 5 doen niet mee).

$$d(\pi, \pi) = (\pi - 3) + 1 = \underline{\underline{\pi - 2}}$$

c) Niet equivalent, want bijv. $D(3, 3)$ is gesloten in $(\mathbb{R}, d)$ (want een gesloten bol) maar niet gesloten in $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

d) $(\mathbb{R}, d)$ niet compact, want niet een begreind.
 $(\mathbb{R}, d)$ ook niet samenhangend, want bijv $\{0\}$ is clopen.

3. a) Zij O open in (X, d_1) . Kies $p \in O$

Dan $\exists \varepsilon > 0 : B_{d_1}(p, \varepsilon) \subset O$.

Daar $d_1 \leq d_2$ geldt: $B_{d_2}(p, \varepsilon) \subset B_{d_1}(p, \varepsilon)$

Dus zeker $B_{d_2}(p, \varepsilon) \subset O$. Dus O open in (X, d_2) .

b) (i) Waar: Zij U een open oord. van (X, d_1) dan (neem a.) zeker een open oord. van (X, d_2) . Dus is U een eindige deel oord.

(ii) Waar: Een dopen deelverz. van (X, d_1) is (neem a.) zeker dopen in (X, d_2)

(iii) Onwaar: Zij d_1 de eucl. metriek op $(0, 1)$ en d_2 de discrete metriek. Dan $d_1 \leq d_2$. $\mathbb{Q} \cap (0, 1)$ ligt dicht in de eucl. metriek, maar niet in de discrete metriek.

c) Neem een omg. U van x in (X, d_1) . Dat is, neem a), ook een omgeving van x in (X, d_2) en daar liggen dan bijna alle termen van de rij in.

d) Zij O open in Y . Dan $f^{-1}[O]$ open in (X, d_1) en dus (neem a.) zeker open in (X, d_2) (kan ook m.b.v. rijtjes criterium en onderdeel c.)

e) Zij d de eucl. metriek op $\mathbb{R}^2$ dan $d \leq d_a$.

(i) en (iii) volgen dat uit het feit dat $[0, 1] \times [0, 1]$ afgesloten is in $(\mathbb{R}, \|\cdot\|)$ en $f(x, y) = x + y$ continu is op $(\mathbb{R}, \|\cdot\|)$.

(ii) volgt uit het feit dat de f_n 's niet een Cauchy-rij is (verschillende termen hebben afstand ≥ 2)

4. a) Uit de driehoeksongelijkheid leidt men af:

$$|d(x, p) - d(y, p)| \leq d(x, y)$$

Bij gegeven willek. $\varepsilon > 0$ nemen we dus gewoon $\delta = \varepsilon$ om unif. cont. aan te tonen.

b) (i) A is niet compact want niet een begrensd (X -as en Y -as behoren tot A)

(ii) A is gesloten en $[0, 14] \times [0, 14]$ is gesloten en begrensd dus $A \cap [0, 14] \times [0, 14]$ is gesloten en begrensd dus compact (Heine Borel)

(iii) f is continue (want f is afstands meting tot het pt $(2, 3)$ in de d'' metriek; zie verder a).)

f neemt op de compacte $A \cap [0, 14] \times [0, 14]$ een minimum aan. Dat minimum is ≤ 2

(want $f(1, 1) = 2$) Buiten $[0, 14] \times [0, 14]$ neemt f op A alleen grotere waarden aan. Dus het minimum op $A \cap [0, 14] \times [0, 14]$ is ook het minimum op heel A .

5. a) Als X sh dan $f[X]$ ook sh en in de postmetriek zijn geen sh deelverz. met meer dan 1 pt. Dus $f[X] = \{p\}$. Dan f is constant.

b) Als X compact dan ook $f[X]$ compact. Stel nu dat $0 \notin f[X]$ dan bestaat $f[X]$ uit louter geïsoleerde pten. Dan kan $f[X]$ alleen nog maar eindig zijn.