Mechanica tentamen - 16 februari 2004

1. potentiaal

   Gegeven is de potentiaal $U(x) = U_0(\sin x^2 - x^2)$. Een deeltje met massa m dat beweegt onder invloed van deze potentiaal bevindt zich op $t = 0$ op $x = 0$ en heeft dan een snelheid $v = v_0$.

   a. $F(x) = -\frac{dU(x)}{dx} = 2U_0 x(1 - \cos x^2)$

   b. $a(x) = \frac{F(x)}{m} = \frac{2U_0}{m} x(1 - \cos x^2)$

   c. $F(x) = mv\frac{dv}{dx} \Rightarrow 2U_0 x(1 - \cos x^2) = mv\frac{dv}{dx} \Rightarrow \int 2U_0 x(1 - \cos x^2)\,dx = \int mvdv$
   $-U_0(\sin x^2 - x^2) = \frac{1}{2}m(v - v_0)^2$ dus $v(x) = v_0 + \sqrt{\frac{2U_0}{m}(x^2 - \sin x^2)}$

2. knikker

   a. Voor HO $F \propto -x$ dus $U = -\int F dx \propto x^2$. Stel $U = \frac{1}{2}Ax^2$ dan is bwv $m\ddot{x} + Ax = 0$ met oplossing $x(t) = C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{A}{m}}t - \phi\right)$

   b. Bedenk dat U komt door de vorm van de kom plus gravitatie kracht. D.w.z. $U(x) = mgh(x)$ in het bijzonder is $U(\ell) = mgh(\ell)$ maar $h(\ell) = \frac{1}{2}\ell$ volgens de gegevens. Dus $U(\ell) = mg\frac{1}{2}\ell$ ook is $U(\ell) = \frac{1}{2}A\ell^2$ en dus is $A = \frac{mg}{\ell}$. De periode is $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{A}{m}}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{\frac{mg}{\ell}}{m}}} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$

   c. Slinger met lengte ℓ heeft terugdrijvende kracht $mg\frac{x}{\ell}$ dus bwv $m\ddot{x} + mg\frac{x}{\ell} = 0$ of $\ddot{x} + \frac{g}{\ell}x = 0$ dus $\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$ en $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{\ell}}} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ dit is hetzelfde antwoord als bij b) QED

3. wiel

   De traagheidmomenten van de wielen zijn $I = \frac{1}{2}MR^2$; de hoekverdraaiingen van beide wielen zijn $\theta = x/R$ als x de lineaire verplaatsting van de as is.

   a. Voor wiel W uit krachten: $Mg\sin\alpha - T_2 - f = M\ddot{x}$ en uit momenten: $\ddot{\theta}I = fR$
   Voor wiel V uit momenten: $\ddot{\theta}I = (T_2 - T_1)R$
   Voor massa m uit krachten: $T_1 - mg = m\ddot{x}$
   Uit geometrie $\theta = x/R$ dus $\ddot{\theta} = \ddot{x}/R$
   Oplossen van deze 5 vergelijkingen geeft $Mg\sin\alpha - mg = \left(M + m + \frac{2I}{R^2}\right)\ddot{x}$ met $I = \frac{1}{2}MR^2$ dus $Mg\sin\alpha - mg = (2M + m)\ddot{x} \Rightarrow \ddot{x} = \frac{Mg\sin\alpha - mg}{2M+m}$

   b. $\Delta x = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}\frac{Mg\sin\alpha - mg}{2M+m}t^2$

4. vrachtwagen

   Merk op dat de snelheid van de vrachtwagen konstant is.

   a. $dp = (m + dm)v - mv = v\,dm$
   $F = \frac{dp}{dt} = v\frac{dm}{dt} = v\mu$
   vermogen: $P = Fv = \mu v^2$

   b. $K = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow \frac{dK}{dt} = \frac{1}{2}\frac{dm}{dt}v^2 = \frac{1}{2}\mu v^2$

c. Om de snelheid van de regen gelijk te kunnen maken aan die van de vrachtwagen is wrijving nodig. Er wordt dus bewegingsenergie omgezet in warmte.

5. soldaat

a. De zwaartekracht $F_z = mg$, de Coriolis schijnkracht $F_C = -2m\ \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = -2m\omega v \sin\lambda$ en de middelpuntvliedendeschijnkracht $F_{mv} = -m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R} = -m\omega^2 R \cos\lambda$ met $\boldsymbol{\omega}$ rotatie snelheid en $\mathbf{R}$ straal van de aarde.

b. De tijd die de kogel onderweg is is $T = \frac{x}{v}$. De horizontale versnelling overdwars is $a_C = -2\omega v \sin\lambda$ de horizontale snelheid overdwars is $v_C = \int_0^T a_C dt = \int_0^{x/v} -2\omega v \sin\lambda dt = -2\omega x \sin\lambda$ de horizontale afwijking is $\int_0^T v_C dt = \int_0^{x/v} -2\omega x \sin\lambda dt = -\frac{2\omega x^2}{v} \sin\lambda$ d.i. naar het Oosten.

c. De vertikale versnelling naar beneden is $a_v = g - \omega^2 R \cos\lambda$ de vertikale snelheid is $v_v(t) = \int (g - \omega^2 R \cos\lambda)\, dt = t\,(g - \omega^2 R \cos\lambda)$ en de vertikale afwijking is $\int t\,(g - \omega^2 R \cos\lambda)\, dt = \frac{1}{2} t^2 (g - \omega^2 R \cos\lambda) = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{v}\right)^2 (g - \omega^2 R \cos\lambda)$ deze is naar altijd beneden.

6. bulkmodulus

a. $\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow V = \frac{m}{\rho} \Rightarrow \frac{dV}{d\rho} = -\frac{m}{\rho^2}$ dus $\frac{V}{dV} = \frac{\frac{m}{\rho}}{-\frac{m}{\rho^2} d\rho} = -\frac{\rho}{d\rho}$ dat invullen in $K = -V\frac{dp}{dV}$ geeft $K = \rho\frac{dp}{d\rho}$

b. $\Delta p = \rho g y$ dus $\frac{dp}{dy} = \rho g$

c. Uit b. volgt $dp = \rho g dy$ dat invullen in $K = \rho\frac{dp}{d\rho}$ geeft $K = \rho\frac{\rho g dy}{d\rho}$ dus $\frac{K}{\rho^2 g} d\rho = dy$ dus $\int_{\rho_0}^{\rho} \frac{K}{\rho^2 g} d\rho = \int_0^D dy$ en dus $K\frac{\rho - \rho_0}{g\rho\rho_0} = D$ waaruit volgt $\rho(D) = \frac{K\rho_0}{K - Dg\rho_0}$