Mechanica deeltentamen 2 - 19 december 2003

1. planeet - excentriciteit
   a. $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$. Cirkelvormige baan dus $v = \omega r$ en $L = rmv = m\omega r^2 \left(= m\sqrt{GMr}\right)$
   b. $K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 \left(= \frac{GMm}{2r}\right)$ en $U = -\frac{GMm}{r}$
   c. $F_g = F_{cp} \Rightarrow \frac{GMm}{r^2} = m\omega^2 r$ dus $GM = \omega^2 r^3$
   d. $\frac{2}{G^2 m^3 M^2} EL^2 = \frac{2}{(GM)^2 m^3}\left(\frac{1}{2}m\omega^2 r^2 - \frac{GMm}{r}\right)\left(m\omega r^2\right)^2 =$
   $= \frac{2}{(\omega^2 r^3)^2 m^3}\left(\frac{1}{2}m\omega^2 r^2 - \frac{\omega^2 r^3 m}{r}\right)\left(m\omega r^2\right)^2 = -1$ dus $e = 0$ q.e.d.

2. getijdekracht

$F_{getijde} = F_{centrifugaal} - F_{gravitatie}$ en $F_{centrifugaal} = F_{gravitatie,m.p.aarde}$ dus $F_{getijde} = \frac{GmM}{R^2} - \frac{GmM}{(R-r)^2} = GmM\left(\frac{1}{R^2} - \frac{1}{(R-r)^2}\right) = GmM\left(\frac{(R-r)^2 - R^2}{R^2(R-r)^2}\right) = GmM\left(\frac{-2Rr + r^2}{R^2(R-r)^2}\right)$

$\simeq \frac{-2r}{R^3}GmM = \frac{-2\left(6\times10^6\,\mathrm{m}\right)}{(1.8\times10^{11}\,\mathrm{m})^3}\left(6.6\times10^{-11}\,\mathrm{N\,m^2\,kg^{-2}}\right)(1\,\mathrm{kg})\left(2\times10^{30}\,\mathrm{kg}\right) = -2.716\times 10^{-7}\,\mathrm{N}$

3. massa valt op planeet
   a. Uit energiebehoud: $0 + 0 = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{R}$ dus $v = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$
   b. De valversnelling op het oppervlak is $g := \frac{GM}{R^2}$. Bij konstante versnelling geldt $v = gt$ en $h = \frac{1}{2}gt^2$ dus $v = \sqrt{2hg}$. Er moet dus gelden $v = \sqrt{2hg} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$ dus $\sqrt{2h\frac{GM}{R^2}} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$ dus $h = R$.

4. cilinders
   a. $V_A = \pi r^2 b$ dus $m = \rho_A V_A = \pi r^2 b \rho_A \Rightarrow \rho_A = \frac{m}{\pi r^2 b}$
   $V_B = \pi r^2 b - \pi\left(\frac{r}{2}\right)^2 b = \frac{3}{4}\pi r^2 b$ dus $m = \rho_B V_B = \frac{3}{4}\pi r^2 b \rho_B \Rightarrow \rho_B = \frac{4m}{3\pi r^2 b}$
   $I_A = \int_0^r x^2 dm = \int_0^r x^2 \rho_A b 2\pi x dx = \frac{1}{2}\rho_A b\pi r^4 = \frac{1}{2}\frac{m}{\pi r^2 b} b\pi r^4 = \frac{1}{2}mr^2$
   $I_B = \int_{r/2}^r x^2 dm = \int_{r/2}^r x^2 \rho_B b 2\pi x dx = \frac{15}{32}\rho_B b\pi r^4 = \frac{15}{32}\frac{4m}{3\pi r^2 b} b\pi r^4 = \frac{5}{8}mr^2$
   b. Zij de wrijvingskracht die de cilinder laat rollen f. Dan geldt
   $\sum \tau = I\ddot{\theta} \Rightarrow fr = -I\ddot{\theta}$
   $\sum F = m\ddot{x} \Rightarrow mg\sin\alpha - f = m\ddot{x}$
   Verder volgt uit de geometrie dat $\ddot{x} = -r\ddot{\theta}$
   Eliminatie van f en $\ddot{\theta}$ geeft $mg\sin\alpha - \frac{I\ddot{x}}{r^2} = m\ddot{x}$ dus $\ddot{x} = \frac{mg\sin\alpha}{m + \frac{I}{r^2}}$
   c. $\frac{\ddot{x}_A}{\ddot{x}_B} = \frac{\frac{mg\sin\alpha}{m + \frac{\frac{1}{2}mr^2}{r^2}}}{\frac{mg\sin\alpha}{m + \frac{\frac{5}{8}mr^2}{r^2}}} = \frac{\frac{g\sin\alpha}{1+\frac{1}{2}}}{\frac{g\sin\alpha}{1+\frac{5}{8}}} = \frac{13}{12}$

5. knikkers
   a. Voor de berekening van de Coriolis versnelling moeten we $\mathbf{v}$ en $\mathbf{w}$ vectorieel optellen. Als $\mathbf{u} := \mathbf{v} + \mathbf{w}$ een hoek θ maakt met het noorden geldt:

$\mathbf{a}_c = -2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} = -2 \begin{pmatrix} \omega\cos\lambda \\ 0 \\ \omega\sin\lambda \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u\cos\theta \\ u\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} -\omega u\sin\lambda\sin\theta \\ \omega u\sin\lambda\cos\theta \\ \omega u\cos\lambda\sin\theta \end{pmatrix}$ en de grootte van de versnelling in het vlak van de vloer is $2\omega u\sin\lambda = 2\omega\,|\mathbf{v}+\mathbf{w}|\sin\lambda$

b. In het stelsel van de vloer van de trein geldt: $\tan\phi = \frac{\Delta x_{cor}}{\ell} = \frac{\frac{1}{2}a_c^{\perp}t^2}{wt}$ waarbij $a_c^{\perp}$ de component is van de Coriolis versnelling die loodrecht op $\mathbf{w}$ staat. Kies nu de $X-$as langs $\mathbf{w}$. Dan geldt $\mathbf{a}_c = -2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} = -2 \begin{pmatrix} \omega\cos\lambda \\ 0 \\ \omega\sin\lambda \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v\cos\theta + w \\ v\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} -\omega\sin\lambda\; v\sin\theta \\ \omega\sin\lambda\,(v\cos\theta + w) \\ \omega\cos\lambda\; v\sin\theta \end{pmatrix}$ De component daarvan die ligt in het vlak van de vloer en loodrecht staat op $\mathbf{w}$ is de $Y-$component: $a_c^{\perp} = -2\omega\sin\lambda\,(v\cos\theta + w)$ (dus met $\theta = \angle(\mathbf{v},\mathbf{w})$) invullen geeft dan $\tan\phi = \frac{\frac{1}{2}a_c^{\perp}t^2}{wt} = \frac{\frac{1}{2}2\omega\sin\lambda(v\cos\theta+w)t^2}{wt} = \omega\sin\lambda\frac{v\cos\theta+w}{w}t$

6. vloeistof in tank

a. Omdat de vloeistof niet-samendrukbaar is, is de daling van het oppervlak direct gerelateerd aan v. De snelheid van het oppervlak is $v_s = v\frac{\frac{1}{4}\pi d^2}{\frac{1}{4}\pi D^2} = v\frac{d^2}{D^2}$. Met Bernouilli volgt $\frac{1}{2}\rho v_s^2 + g\rho h = \frac{1}{2}\rho v^2 + g\rho 0$ dus $\frac{1}{2}\rho\left(v\frac{d^2}{D^2}\right)^2 + g\rho h = \frac{1}{2}\rho v^2$ en $v = \sqrt{\frac{2gh}{1-\frac{d^4}{D^4}}}$

b. Geen uitwendige kracht dus $0 = \frac{dp}{dt} = m\frac{dv}{dt} + v\frac{dm}{dt}$ ofwel $ma = -v\frac{dm}{dt}$. Nu is de massa van het vat $m = \rho\frac{1}{4}\pi D^2 h$ en voor de uitstromende vloeistof geldt $dm = \rho\frac{1}{4}\pi d^2 v dt$. Dus $a = -\frac{v}{m}\frac{dm}{dt} = -\frac{v}{\rho\frac{1}{4}\pi D^2 h}\rho\frac{1}{4}\pi d^2 v = -\frac{d^2}{D^2 h}v^2$ en met v uit opgave a. volgt dan $a = -\frac{d^2}{D^2 h}\frac{2gh}{1-\frac{d^4}{D^4}} = -\frac{d^2}{D^2}\frac{2g}{1-\frac{d^4}{D^4}} = -2g\frac{D^2 d^2}{D^4 - d^4}$