Mechanica tentamen - 12 augustus 2003

1. Hagelkorrel: $F = \frac{dp}{dt} \Rightarrow mg = \frac{d(mv)}{dt}$ met $m = \beta t^n$ volgt $(\beta t^n)\, g = \frac{d((\beta t^n)v)}{dt}$ of $gt^n = \frac{d(t^n v)}{dt}$ dus $\int gt^n\, dt = \int d\,(t^n v)$ en $\frac{1}{n+1} g t^{n+1} = t^n v$ dus $\frac{1}{n+1} gt = v$ en $a = \dot{v} = \frac{1}{n+1} g$

2. pirouettedraaister
   a. $I = \Sigma m r^2 = 2m\,(r\,(t))^2 = 2m\,(r_0 - \beta t)^2$
   b. $[0 = \frac{dL}{dt}]$ dus $I\omega = L = \text{const}$. Op $t = 0$ is $L = 2mr_0^2\omega_0$ dus $\omega\,(t) = \frac{L}{I} = \frac{2mr_0^2\omega_0}{2m(r_0-\beta t)^2} = \frac{r_0^2}{(r_0-\beta t)^2}\omega_0 = \frac{1}{\left(1-\frac{\beta t}{r_0}\right)^2}\omega_0$
   c. $L\,(t) = 2mr_0^2\omega_0$ er is geen extern moment dus hangt L niet van de tijd af.
   d. $E_k\,(t) = \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{1}{2} 2m\,(r_0 - \beta t)^2 \left(\frac{r_0^2}{(r_0-\beta t)^2}\omega_0\right)^2 = m\frac{r_0^4\omega_0^2}{(r_0-\beta t)^2}$
   e. arbeid

      of Uit energie: $W = E_{r=r_1} - E_{r=r_0} = m\frac{r_0^4\omega_0^2}{(r1)^2} - m\frac{r_0^4\omega_0^2}{(r_0)^2} = mr_0^4\omega_0^2\left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_0^2}\right)$

      of Uit kracht $\times$ weg: zij moet per arm de centripetale kracht $F = m\omega^2 r$ leveren.
      $W = \int_{r_0}^{r_1} 2m\omega^2 \mathbf{r}\cdot d\mathbf{r} = -\int_{r_0}^{r_1} 2m\omega^2 r dr$
      $W = -\int_{r_0}^{r_1} 2m\left(\frac{r_0^2}{(r_0-\beta t)^2}\omega_0\right)^2 r dr = -\int_{r_0}^{r_1} 2m\left(\frac{r_0^2}{r^2}\omega_0\right)^2 r dr = -2mr_0^4\omega_0^2\int_{r_0}^{r_1}\frac{1}{r^3}dr =$
      $mr_0^4\omega_0^2\left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_0^2}\right)$

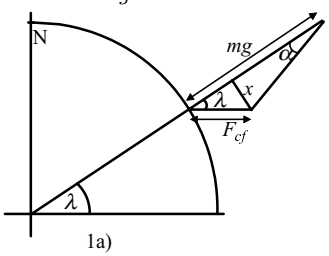
3. hellend vlak

   Uit de geometrie en de bewegingsvergelijkingen volgt:

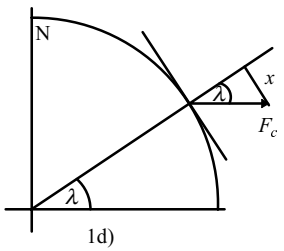
   a.
geometrie:	$a_1 = 2a_2$
geometrie:	$T_{2a} = T_{1a} + T_{1b}$
$m_1 a_1 = F_1$:	$m_1 a_1 = m_1 g\sin\theta - T_{1b}$
$m_2 a_2 = F_2$:	$m_2 a_2 = -m_2 g + T_{2b}$
geometrie:	$r_1\alpha_1 = a_1$
geometrie:	$r_2\alpha_2 = a_2$
$I_1\alpha_1 = \tau_1$:	$I_1\alpha_1 = (T_{1b} - T_{1a})\, r_1$
$I_2\alpha_2 = \tau_2$:	$I_2\alpha_2 = (T_{2a} - T_{2b})\, r_2$

   oplossing:
   $$a_2 = g\frac{2m_1\sin\theta - m_2}{4m_1 + m_2 + 2I_1/r_1^2 + I_2/r_1 r_2}$$
   $$a_1 = 2a_2 = 2g\frac{2m_1\sin\theta - m_2}{4m_1 + m_2 + 2I_1/r_1^2 + I_2/r_1 r_2}$$
   $$\alpha_2 = \frac{a_2}{r2} = \frac{g}{r_2}\frac{2m_1\sin\theta - m_2}{4m_1 + m_2 + 2I_1/r_1^2 + I_2/r_1 r_2}$$
   $$\alpha_1 = 2\frac{g}{r_1}\frac{2m_1\sin\theta - m_2}{4m_1 + m_2 + 2I_1/r_1^2 + I_2/r_1 r_2}$$

4. Timmerman
   a. $F_g = mg$ en $F_{cf} = m\omega^2 R\cos\lambda$ de afwijking van het schietlood komt door de komponent hiervan loodrecht op F_g en die is x. Uit de figuur: $\sin\lambda = \frac{x}{F_{cf}}$ dus $\tan\alpha \simeq \frac{x}{mg} = \frac{F_{cf}\sin\lambda}{mg} = \frac{m\omega^2 R\cos\lambda\sin\lambda}{mg} = \frac{\omega^2 R\sin 2\lambda}{2g}$ omdat α klein is, is ook $\alpha \simeq \frac{\omega^2 R\sin 2\lambda}{2g}$



1a)



1d)

b. Omdat het oppervlak van de aarde op dezelfde manier is vervormd.

c. De Coriolisversnelling is $-2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = -2\omega v \sin\lambda$
De kogel rolt gedurende $1\,\mathrm{s}$ om de $10\,\mathrm{m}$ af te leggen. De zijdelingse afwijking is dan $\int\int a_c dt = \frac{1}{2} a_c t^2 = -\omega v t^2 \sin\lambda = -\omega v \left(\frac{\ell}{v}\right)^2 \sin\lambda = -\frac{\omega \ell^2}{v} \sin\lambda =$
$= -\frac{7.272\,2\times10^{-5}\,\mathrm{s}^{-1}\times(10\,\mathrm{m})^2}{10\,\mathrm{m}/1\,\mathrm{s}} \sin 60^\circ = -6.297\,9 \times 10^{-4}\,\mathrm{m}$

d. De scheefhoek ontstaat doordat de waterpas fout aanwijst (het schilderij zit vast!) en is het verschil tussen stilstaand en rijdend en komt dus alleen door de Coriolisversnelling. Deze is $a_c = -2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = -2\omega v \sin\lambda$. Deze is horizontaal en $\tan\beta = \frac{a_c}{g} = \frac{-2\omega v \sin\lambda}{g} = \frac{-3.778\,7\times10^{-3}\,\mathrm{m\,s^{-2}}}{9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}} = -3.855\,8 \times 10^{-4}$ omdat β klein is, is ook $\beta = -3.855\,8 \times 10^{-4}\,\mathrm{rad} \simeq -2.209\,2 \times 10^{-2\circ}$

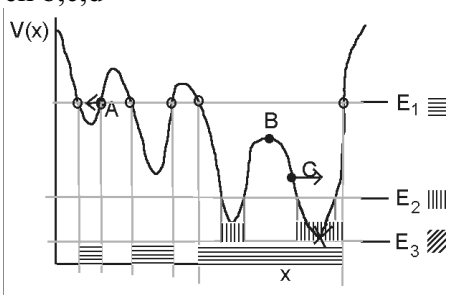
e. Nu is $a_c = -2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = -2\omega v$ in het vlak loodrecht op de aardas (zie fig 1d hierboven) de component in het horizontale vlak is $-2\omega v \sin\lambda$ en dus is β hetzelfde als bij d.: $\beta = -3.855\,8 \times 10^{-4}\,\mathrm{rad}$

5. vat

a. Pas $\frac{P}{\rho} + \frac{1}{2}v^2 + gy = \mathrm{const}$ toe op een stroomlijn van het oppervlak naar het uitstromende water. Aan beide kanten is atmosferische druk en we nemen het wateroppervlak stationair. Dus $\frac{1}{2}v_{opp}^2 + gy_{opp} = \frac{1}{2}v_{uit}^2 + gy_{uit}$ en met $v_{opp}^2 = 0$ volgt $\frac{1}{2}v_{uit}^2 = g\,(y_{opp} - y_{uit})$
Voor opening 1: $\frac{1}{2}v_{uit}^2 = g\,(h-q)$ dus $v_1 = \sqrt{2g\,(h-q)}$
Voor opening 2: $\frac{1}{2}v_{uit}^2 = g\,(h-2q)$ dus $v_2 = \sqrt{2g\,(h-2q)}$

b. De vloeistofstraal heeft bij het verlaten van het vat een horizontale snelheid volgens a. en een vertikale snelheid nul. Dus $x_1 = t_1\sqrt{2g\,(h-q)}$ en $y_1 = q - \frac{1}{2}gt_1^2$ en $x_2 = t_2\sqrt{2g\,(h-2q)}$ en $y_2 = 2q - \frac{1}{2}gt_2^2$; de grond wordt bereikt voor $y = 0$ dus op $t_1 = \sqrt{\frac{2q}{g}}$ resp. $t_2 = \sqrt{\frac{4q}{g}}$ en dan is $x_1 = \sqrt{\frac{2q}{g}}\sqrt{2g\,(h-q)} = 2\sqrt{q\,(h-q)}$ en $x_2 = \sqrt{\frac{4q}{g}}\sqrt{2g\,(h-2q)} = 2\sqrt{2q\,(h-2q)}$

c. Voor het snijpunt is $y_1 = y_2$ en $x_1 = x_2 =: x$ uit $y_1 = y_2$ volgt $q - \frac{1}{2}gt_1^2 = 2q - \frac{1}{2}gt_2^2$ en omdat de horizontale snelheden konstant zijn is $t_i = x/v_i$ dus $q - \frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_1}\right)^2 = 2q - \frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_2}\right)^2$ met bovenstaande v_1 en v_2 geeft dat $q - \frac{1}{2}g\frac{x^2}{2g(h-q)} = 2q - \frac{1}{2}g\frac{x^2}{2g(h-2q)}$ hieruit volgt $x = 2\sqrt{(h-q)\,(h-2q)} = a$

6. Potentiaal

a. en b,c,d