Mechanica deeltentamen 2 - 20 december 2002

1. raket
   a. $d\mathbf{p} = \mathbf{p}_r(t+dt) + \mathbf{p}_f(t+dt) - \mathbf{p}_r(t) = (m+dm)(\mathbf{v}+d\mathbf{v}) + (-dm)(\mathbf{v}+\mathbf{u})$
   $d\mathbf{p} = md\mathbf{v} - \mathbf{u}dm$ dus $0=\frac{d\mathbf{p}}{dt} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt} - \mathbf{u}\frac{dm}{dt}$ en $\mathbf{u}\frac{dm}{dt}=m\frac{d\mathbf{v}}{dt}$ of $\mathbf{u}\mu = m\frac{d\mathbf{v}}{dt}$ dit is de bewegingsvergelijking
   b. Het stuwvermogen is $\frac{dp_f}{dt} = -\mathbf{u}\frac{dm}{dt} = -\mathbf{u}\mu$
   c. $\mathbf{u}\frac{dm}{dt}=m\frac{d\mathbf{v}}{dt}$ dus $\mathbf{u}\frac{dm}{m}=d\mathbf{v}$ en $\mathbf{u}\int_{M_s}^{M_s-\mu t}\frac{dm}{m}=\int_0^v d\mathbf{v}$ en dus $\mathbf{u}\ln\frac{M_s-\mu t}{M_s}=\mathbf{v}$ ofwel, rekeninghoudend met de richting van de vectoren: $v(t) = +u\ln\frac{M_s}{M_s-\mu t}$
   d. $v(\infty) = +u\ln\frac{M_s}{M_0}$

2. Schijf met touw. Noem de spankracht in het touw links S_L en in het touw rechts S_R. Noem de richting van F positief.
   a. Denk de schijf opgebouwd uit concentrische ringen $dI_{ring} = r^2dm$ en $dm_{ring} = \sigma dA = \frac{M}{\pi R^2}2\pi r dr = \frac{2M}{R^2}rdr$. Dus $I_{schijf} = \int_0^R r^2\frac{2M}{R^2}rdr = \frac{1}{2}MR^2$
   b. Uit $f = ma$ voor de massa en $\tau = I\alpha = I\dot{\omega}$ voor het wiel, en uit $x = R\theta$ volgt:
   $$m_1a = S_L - m_1g$$
   $$I\dot{\omega} = R(S_R - S_L) = R(F - S_L)$$
   $$a = R\dot{\omega}$$
   c. De versnelling a van m_1 omhoog volgt uit de in b. gegeven vergelijkingen; men vindt zo: $a = \frac{F-m_1g}{m_1+\frac{M}{2}}$.
   d. De kracht blijft weliswaar hetzelfde, maar de versnellende massa wordt groter.
   e. De bewegingsvergelijkingen worden:
   $$\begin{aligned} m_1a &= S_L - m_1g \\ I\dot{\omega} &= R(S_R - S_L) \\ a &= R\dot{\omega} \\ m_2a &= m_2g - S_R \end{aligned}$$
   waaruit volgt: $a = g\frac{m_2-m_1}{m_1+m_2+\frac{M}{2}}$

3. soldaat
   a. De zwaartekracht $F_z = mg$, de Coriolis schijnkracht $F_C = -2m\ \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v} = -2m\omega v\sin\lambda$ en
   de middelpuntvliedendeschijnkracht $F_{mv} = -m\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{R} = -m\omega^2R\cos\lambda$ met $\boldsymbol{\omega}$ de rotatie snelheid en $\mathbf{R}$ de straal van de aarde.
   b. De tijd die de kogel onderweg is is $T = \frac{x}{v}$. De horizontale versnelling overdwars is $a_C = -2\omega v\sin\lambda$ de horizontale snelheid overdwars is $v_C = \int(-2\omega v\sin\lambda)\,dt = -2\omega vt\sin\lambda$ de horizontale afwijking is $\int v_Cdt = \int(-2\omega vt\sin\lambda)\,dt = -\omega vt^2\sin\lambda = -\frac{\omega x^2}{v}\sin\lambda$ d.i. naar het Oosten.
   c. De centrifugale schijnkracht is $-\omega^2R\cos\lambda$ en de komponent daarvan in vertikale richting is $-\omega^2R\cos^2\lambda$ dus de totale vertikale versnelling naar beneden is $a_v = g - \omega^2R\cos^2\lambda$ de vertikale snelheid is $v_v(t) = \int(g-\omega^2R\cos^2\lambda)\,dt = t(g-\omega^2R\cos^2\lambda)$ en de vertikale afwijking is
   $\int t(g-\omega^2R\cos^2\lambda)\,dt = \frac{1}{2}t^2(g-\omega^2R\cos^2\lambda) = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{v}\right)^2(g-\omega^2R\cos^2\lambda)$ deze is naar beneden.

4. staaf

a. $E = \frac{\text{stress}}{\text{strain}} = \frac{F/A}{\frac{\Delta\ell}{\ell}} = \frac{2mg/\frac{1}{4}\pi d^2}{\frac{\Delta\ell}{\ell}}$ dus $\Delta\ell = \frac{8\ell mg}{\pi E d^2}$

b. $W = \int_0^{\Delta\ell} F(s)\, ds$ met $F(s)$ uit $E = \frac{\text{stress}}{\text{strain}} = \frac{F/A}{\frac{s}{\ell}}$ dus $F(s) = \frac{EAs}{\ell}$ volgt $W = \int_0^{\Delta\ell} \frac{EAs}{\ell} ds = \frac{EA(\Delta\ell)^2}{2\ell} = \frac{E\left(\frac{1}{4}\pi d^2\right)\left(\frac{8\ell mg}{\pi E d^2}\right)^2}{2\ell} = \frac{8A\ell m^2 g^2}{\pi E d^2}$

c. Voor een buisje met straal r en wanddikte Δr geldt: $G\phi = \frac{\Delta F}{\Delta A} = \frac{\Delta F}{2\pi r \Delta r}$ terwijl $\phi = \frac{r\theta}{\ell}$ dus $\Delta F = 2\pi r \Delta r G \frac{r\theta}{\ell}$ dus $\Delta T = r\Delta F = 2\pi G \frac{\theta}{\ell} r^3 \Delta r$. Voor de staaf wordt dat $T = \int_0^{d/2} 2\pi G \frac{\theta}{\ell} r^3 dr = \frac{1}{32}\pi G \frac{\theta}{\ell} d^4$

d. $T = I\alpha$ geeft $\frac{-1}{32}\pi G \frac{\theta}{\ell} d^4 = \left(2 \cdot m \cdot \left(\frac{1}{2}b\right)^2\right)\ddot{\theta}$ dus $\ddot{\theta} + \frac{\frac{\pi G d^4}{16\ell}}{b^2 m}\theta = 0$ (of $\ddot{\theta} + \frac{2c}{b^2 m}\theta = 0$)

e. $\omega = \sqrt{\frac{\pi G d^4}{16 b^2 m \ell}}$ (of $\omega = \sqrt{\frac{2c}{b^2 m}}$)

5. (satelliet)

a. $M = V\rho = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$

b. $T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} a^3$

c. $T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} a^3 = \frac{4\pi^2}{G\frac{4}{3}\pi R^3 \rho} a^3 = \frac{3\pi}{G\rho}\frac{a^3}{R^3} \simeq \frac{3\pi}{G\rho}$ de laatste gelijkheid geldt omdat $a = R + d \simeq R$. T hangt dus alleen van ρ af en niet van R.

6. Cylidrisch vat

a. Zij x de vertikale afstand van het scharnier tot een punt op de klep. Het water stroomt nog niet dus $p = \rho g (d + x)$. Het moment om het scharnier t.g.v. een horizontaal strookje water is $\Delta M = Fx = p\Delta A\; x = \rho g (d + x) b \Delta x\; x$ en het totale moment is dus $M = \int dM = \int_0^h \rho g (d + x) x b\; dx = \rho g b \left(\frac{1}{3}h^3 + \frac{1}{2}dh^2\right)$

b. Pas Bernouilli: $\frac{P}{\rho} + \frac{1}{2}v^2 + gy = \text{const}$ toe op een stroomlijn van het oppervlak naar het uitstromende water. Aan beide kanten is atmosferische druk in dit onderdeel nemen we het wateroppervlak stationair. Dus $\frac{1}{2}v_{opp}^2 + gy_{opp} = \frac{1}{2}v_{uit}^2 + gy_{uit}$ en met $v_{opp}^2 = 0$ $\frac{1}{2}v_{uit}^2 = g(y_{opp} - y_{uit}) = gd$ dus $v_{uit} = \sqrt{2gd}$

c. Het volumen dat per seconde uitstroomd is hbv_{uit}. Het oppervlak van het water zakt dus met snelheid $v_{opp} = \frac{hbv_{uit}}{A}$ nu weer met Bernouilli: $\frac{1}{2}v_{opp}^2 + gy_{opp} = \frac{1}{2}v_{uit}^2 + gy_{uit}$ ofwel
$g(y_{opp} - y_{uit}) = \frac{1}{2}v_{uit}^2 - \frac{1}{2}v_{opp}^2$ en dus $2gd = v_{uit}^2 - v_{opp}^2 = v_{uit}^2 - \left(\frac{hbv_{uit}}{A}\right)^2 = v_{uit}^2\left(1 - \left(\frac{hb}{A}\right)^2\right)$ dus $v_{uit} = \sqrt{\frac{2gd}{1 - \left(\frac{hb}{A}\right)^2}}$

d. Het volumen dat per seconde uitstroomt is $hbv_{uit} = hb\sqrt{\frac{2gs}{1 - \left(\frac{hb}{A}\right)^2}}$ waarbij s de tijdsafhankelijke hoogte is van het water boven de klep. Het oppervlak van het water zakt dus met snelheid $v_{opp} = \frac{hbv_{uit}}{A} = \frac{hb\sqrt{\frac{2gs}{1 - \left(\frac{hb}{A}\right)^2}}}{A}$ die snelheid is ook $-\frac{ds}{dt}$ dus

$\frac{ds}{dt} = -v_{opp} = -\frac{hb\sqrt{\frac{2gs}{1-\left(\frac{hb}{A}\right)^2}}}{A}$ en dat kunnen we integreren met scheiding van variabelen: $\frac{ds}{\sqrt{s}} = -\frac{hb\sqrt{\frac{2g}{1-\left(\frac{hb}{A}\right)^2}}}{A}dt$ en de tijd waarin $d \rightarrow d/2$ volgt uit $\int_d^{d/2} \frac{ds}{\sqrt{s}} = -\int_0^t \frac{hb\sqrt{\frac{2g}{1-\left(\frac{hb}{A}\right)^2}}}{A}dt$ ofwel $\sqrt{d}\left(2-\sqrt{2}\right) = \frac{hb\sqrt{\frac{2g}{1-\left(\frac{hb}{A}\right)^2}}}{A}t$ en dus
$t = A\left(2\sqrt{2}-2\right)\sqrt{\frac{d\left(\left(\frac{1}{hb}\right)^2-\left(\frac{1}{A}\right)^2\right)}{g}}$