Mechanica deeltentamen 1 - 22 oktober 2002

1. wiskunde
   a. $\sin(x) = x - \frac{1}{6}x^3$
   b. $e^x = 1 + x$
   c. $\frac{1}{1+x} = 1 - x$
   d. $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x$
   e. De karakteristieke vergelijking voor $\dddot{x} + 6\ddot{x} + 7x + 8 = 0$ is $p^3 + 6p^2 + 7 = 0$
   f. $\frac{d}{dx}\sin(e^{5x}) = 5e^{5x}\cos(e^{5x})$
   g. $(15 + 5i)\,/\,(2 + i) = 7 - i$

2. waterskiër
   a. $m\ddot{x} = F_b - k\dot{x}$
   b. Homogene vergelijking is $m\ddot{x} + k\dot{x} = 0$ de karakteristieke vergelijking daarbij is $mp^2 + kp = 0$ met oplossingen: $p = 0$ en $p = -\frac{k}{m}$. De oplossing van de homogene vergelijking is dus $x(t) = A + Be^{-\frac{k}{m}t}$. Een PO oplossing van de inhomogene is bijv $k\dot{x} = F_b$ (dan is $\ddot{x} = 0$) ofwel $x = \frac{F_b}{k}t$. De algemene oplossing is dus $x(t) = \frac{F_b}{k}t + A + Be^{-\frac{k}{m}t}$ en $v(t) = \frac{F_b}{k} - \frac{k}{m}Be^{-\frac{k}{m}t}$
   c. Uit $x(t) = \frac{F_b}{k}t + A + Be^{-\frac{k}{m}t}$ volgt $\dot{x}(t) = \frac{F_b}{k} - \frac{k}{m}Be^{-\frac{k}{m}t}$
      Uit $x(0) = \frac{F_b}{k}0 + A + Be^{-\frac{k}{m}0} = 0$ en $\dot{x}(0) = \frac{F_b}{k} - \frac{k}{m}Be^{-\frac{k}{m}0} = 0$ volgt
      $A + B = 0$ en $\frac{F_b}{k} = \frac{k}{m}B$ dus $-A = B = \frac{mF_b}{k^2}$ invullen geeft:
      $x(t) = \frac{F_b}{k}t - \frac{mF_b}{k^2} + \frac{mF_b}{k^2}e^{-\frac{k}{m}t}$ en $\dot{x}(t) = \frac{F_b}{k} - \frac{F_b}{k}e^{-\frac{k}{m}t}$
   d. Voor $t \to \infty$ volgt $\dot{x}(t) = \frac{F_b}{k}$. Anders: dan is $\ddot{x} = 0$ dus het is de oplossing van $k\dot{x} = F_b$.

3. hellend vlak
   a. Uit de geometrie en de bewegingsvergelijkingen volgt

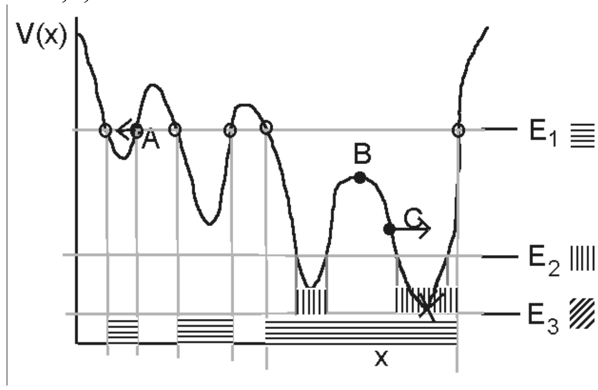
$$\begin{array}{lcl} a_1 = 2a_2 & & a_1 = 2g\frac{2m_1\sin\theta - m_2}{4m_1+m_2} \\ T_2 = 2T_1 & & a_2 = g\frac{2m_1\sin\theta - m_2}{4m_1+m_2} \\ m_1a_1 = m_1g\sin\theta - T_1 & \text{waaruit volgt} & T_1 = gm_1m_2\frac{\sin\theta+2}{4m_1+m_2} \\ m_2a_2 = -m_2g + T_2 & & T_2 = 2gm_1m_2\frac{\sin\theta+2}{4m_1+m_2} \end{array}$$

   b. Uit de geometrie en de bewegingsvergelijkingen volgt

$$\begin{array}{lcl} a_1 = 2a_2 & & a_1 = 2g\frac{2m_1\sin\theta - m_2 - 2\mu m_1\cos\theta}{4m_1+m_2} \\ T_2 = 2T_1 & & a_2 = g\frac{2m_1\sin\theta - m_2 - 2\mu m_1\cos\theta}{4m_1+m_2} \\ m_1a_1 = m_1g\sin\theta - T_1 - \mu N & \text{waaruit volgt} & T_1 = gm_1m_2\frac{\sin\theta - \mu\cos\theta + 2}{4m_1+m_2} \\ m_2a_2 = -m_2g + T_2 & & T_2 = 2gm_1m_2\frac{\sin\theta - \mu\cos\theta + 2}{4m_1+m_2} \\ N = m_1g\cos\theta & & N = gm_1\cos\theta \end{array}$$

4. Potentiaal

   a. en b,c,d



   e. $\mathbf{F} = -\boldsymbol{\nabla} U = -\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} (xy + xz + yz) = -\begin{pmatrix} y+z \\ x+z \\ x+y \end{pmatrix}$ en $\mathbf{F}(-2,2,2) = -\begin{pmatrix} 2+2 \\ -2+2 \\ -2+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -4\widehat{\mathbf{i}}$ d.i. in de richting van de negatieve x-as

   f. $P(t) = F(t)\ v = \left\{(3\,\mathrm{N\,m^{-1}})(3\,\mathrm{m}) + (5\,\mathrm{N\,m^{-2}})(3\,\mathrm{m})^2\right\} 5\,\mathrm{m\,s^{-1}} = 270\,\mathrm{W}$

5. Mijnwerkster:

   a. $ma = -F_g + F_v \Rightarrow (80\,\mathrm{kg})(-6\,\mathrm{m\,s^{-2}}) = -(80\,\mathrm{kg})(9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}) + F_v$ dus $F_v = (80\,\mathrm{kg})(3.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}) = 304.0\,\mathrm{N}$ de weegschaal is echter geijkt bij een zwaartekracht versnelling van 9.8 $\mathrm{m\,s^{-2}}$ dus hij geeft aan: $\frac{(80\,\mathrm{kg})\left(3.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}\right)}{9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}} = 31.02\,\mathrm{kg}$

   b. Binnen de aarde is $F_g(r) = G\frac{mM}{a^3}r$ op het oppervlak is $F_g(a) = G\frac{mM}{a^3}a = g$ dus $F_g(r) = g\frac{r}{a}$. We hebben zo $F_g(6380\,\mathrm{km} - 638\,\mathrm{km}) = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}\,\frac{6380\,\mathrm{km} - 638\,\mathrm{km}}{6380\,\mathrm{km}} = 8.82\,\mathrm{m\,s^{-2}}$. We vinden zo $\frac{(80\,\mathrm{kg})\left(8.82\,\mathrm{m\,s^{-2}} - 6\,\mathrm{m\,s^{-2}}\right)}{9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}} = 23.02\,\mathrm{kg}$

6. Beschouw de gedempte harmonische oscillator met massa m veerkonstante k en dempingskonstante b.

   a. $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$

   b. Uit de karakteristieke vergelijking $mp^2 + bp + k = 0$ volgt $p = \frac{1}{2m}\left(-b \pm \sqrt{(b^2 - 4mk)}\right)$ dus de oplossing is $x = Ae^{\frac{1}{2m}\left(-b+\sqrt{(b^2-4mk)}\right)t} + Be^{\frac{1}{2m}\left(-b-\sqrt{(b^2-4mk)}\right)t}$

   c. $Q = \frac{\omega_0}{\gamma} = \frac{\sqrt{\frac{k}{m}}}{\frac{b}{m}} = \frac{\sqrt{km}}{b}$ betekenis: $\frac{2\pi \text{ opgeslagen energie}}{\text{energie verlies per periode}}$ of reciproke van de relatieve bandbreedte.

   d. $b^2 = 4mk$

   e. $x = Ae^{-\frac{b}{2m}t} + Bte^{-\frac{b}{2m}t}$