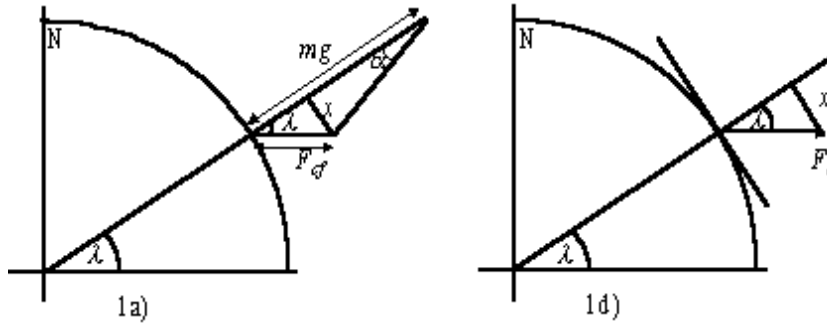


1. Timmerman

- a. $F_g = mg$ en $F_{cf} = m\omega^2 R \cos \lambda$ de afwijking van het schietlood komt door de komponent hiervan loodrecht op F_g en die is x . Uit de figuur: $\sin \lambda = \frac{x}{F_{cf}}$ dus $\tan \alpha \simeq \frac{x}{mg} = \frac{F_{cf} \sin \lambda}{mg} = \frac{m\omega^2 R \cos \lambda \sin \lambda}{mg} = \frac{\omega^2 R \sin 2\lambda}{2g}$ omdat α klein is, is ook $\alpha \simeq \frac{\omega^2 R \sin 2\lambda}{2g}$



- b. Omdat het oppervlak van de aarde op dezelfde manier is vervormd.
- c. De Coriolisversnelling is $-2\omega \times \mathbf{v} = -2\omega v \sin \lambda$
De kogel rolt gedurende 1 s om de 10 m af te leggen. De zijdelingse afwijking is dan $\int \int a_c dt = \frac{1}{2} a_c t^2 = -\omega v t^2 \sin \lambda = -\omega v \left(\frac{\ell}{v}\right)^2 \sin \lambda = -\frac{\omega \ell^2}{v} \sin \lambda = \frac{1}{2} (-7.272 \times 10^{-4} \text{ m s}^{-2}) (1 \text{ s})^2 = -3.636 \times 10^{-4} \text{ m}$
- d. De scheefhoek ontstaat doordat de waterpas fout aanwijst (het schilderij zit vast!) en is het verschil tussen stilstaand en rijdend en komt dus alleen door de Coriolisversnelling. Deze is $a_c = -2\omega \times \mathbf{v} = -2\omega v \sin \lambda = -2 \frac{2\pi}{3600 \times 24 \text{ s}} \times 30 \text{ m s}^{-1} \times \sin 30^\circ = -2.1817 \times 10^{-3} \text{ m s}^{-2}$. Deze is horizontaal en $\tan \beta = \frac{a_c}{g} = \frac{-2.1817 \times 10^{-3} \text{ m s}^{-2}}{9.8 \text{ m s}^{-2}} = -2.2262 \times 10^{-4}$ omdat β klein is, is ook $\beta = -2.2262 \times 10^{-4} \text{ rad}$
- e. Nu is $a_c = -2\omega \times \mathbf{v} = -2\omega v$ in het vlak loodrecht op de aardas (zie fig 1d hierboven) de component in het horizontale vlak is $-2\omega v \sin \lambda = -2 \frac{2\pi}{3600 \times 24 \text{ s}} \times 30 \text{ m s}^{-1} \times \sin 30^\circ = -2.1817 \times 10^{-3} \text{ m s}^{-2}$ en $\beta = \frac{-2.1817 \times 10^{-3} \text{ m s}^{-2}}{9.8 \text{ m s}^{-2}} = -2.2262 \times 10^{-4} \text{ rad} \simeq -1.3357 \times 10^{-2}^\circ$

2. Neem aan dat de maan met massa m en straal r in een cirkelbaan om de aarde met massa M beweegt. De afstand tussen de middelpunten van aarde en maan is R . We beschouwen twee 'stukjes' maan, ieder met massa μ , één in het middelpunt van de maan (μ_1) en een op het naar de aarde toegekeerde maanoppervlak op de verbindinglijn aarde-maan (μ_2).

a. $F_{a,\mu_1} = -G \frac{M\mu}{R^2}$ en $F_{a,\mu_2} = -G \frac{M\mu}{(R-r)^2}$

b. $\Delta F_{aarde} = -G \frac{M\mu}{(R-r)^2} + G \frac{M\mu}{R^2}$

c. $F_{maan} = G \frac{m\mu}{r^2}$ dus evenwicht als $G \frac{m\mu}{r^2} - G \frac{M\mu}{(R-r)^2} + G \frac{M\mu}{R^2} = 0$ ofwel als $-\frac{m}{r^2} = -\frac{M}{(R-r)^2} + \frac{M}{R^2}$ eerst benaderen we $-\frac{M}{(R-r)^2} + \frac{M}{R^2} = -\frac{M}{R^2(1-\frac{r}{R})^2} + \frac{M}{R^2} = \frac{M}{R^2} \left(-\frac{1}{(1-\frac{r}{R})^2} + 1 \right) \simeq \frac{M}{R^2} \left(-\frac{1}{1-2\frac{r}{R}} + 1 \right) \simeq \frac{M}{R^2} \left(-(1+2\frac{r}{R}) + 1 \right) = -2\frac{M}{R^3}r$ Dus $-\frac{m}{r^2} = -2\frac{M}{R^3}r$ ofwel $R = r^3 \sqrt{2\frac{M}{m}}$

d. $R = r \sqrt[3]{2 \frac{M}{m}} = r \sqrt[3]{2 \frac{\frac{4}{3} \pi d^3 \rho}{\frac{4}{3} \pi r^3 \rho}} = d \sqrt[3]{2}$

e. De Roche limiet

3. staaf

a. $E = \frac{\text{stress}}{\text{strain}} = \frac{F/A}{\frac{\Delta \ell}{\ell}} = \frac{mg/\frac{1}{4}\pi d^2}{\frac{\Delta \ell}{\ell}}$ dus $\Delta \ell = \frac{4\ell mg}{\pi E d^2}$

b. $W = \int_0^{\Delta \ell} F(s) ds$ met $F(s)$ uit $E = \frac{\text{stress}}{\text{strain}} = \frac{F/A}{\frac{s}{\ell}}$ dus $F(s) = \frac{EAs}{\ell}$ volgt $W = \int_0^{\Delta \ell} \frac{EAs}{\ell} ds = \frac{EA(\Delta \ell)^2}{2\ell} = \frac{8A\ell m^2 g^2}{\pi^2 E d^4}$

c. De massa van de kabel is $m = \frac{1}{4}\pi d^2 \ell \rho$. Vlak onder de ballon is de kracht op de kabel mg en de relatieve uitrekking is daar grofweg

$$\frac{\Delta s}{s} = \frac{mg}{\frac{1}{4}\pi E d^2} = \frac{\frac{1}{4}\pi d^2 \ell \rho g}{\frac{1}{4}\pi E d^2} = \frac{\ell \rho g}{E} = \frac{(40 \times 10^6 \text{ m})(10^4 \text{ kg m}^{-3})(9.8 \text{ m s}^{-2})}{(2 \times 10^{11} \text{ N m}^{-2})} = 19.6 \text{ en zover kan je een staalkabel niet uitrekken zonder dat hij breekt!}$$

Een preciesere berekening neemt de centrifugale schijnkracht mee en de faname van g met de hoogte.

4. In een cylindrisch vat (zie figuur) zit op afstand d van het oppervlak een rechthoekige klep met hoogte h en breedte b , die aan de bovenkant kan scharnieren.

a. Zij x de verticale afstand van het scharnier tot een punt op de klep. Het water stroomt nog niet dus $p = \rho g(d+x)$. Het moment om het scharnier t.g.v. een horizontaal strookje water is $\Delta M = Fx = p \Delta A x = \rho g(d+x) b \Delta x$ en het totale moment is dus $M = \int dM = \int_0^h \rho g(d+x) x b dx = \rho g b \left(\frac{1}{3}h^3 + \frac{1}{2}dh^2\right)$

b. Pas Bernouilli: $\frac{P}{\rho} + \frac{1}{2}v^2 + gy = \text{const}$ toe op een stroomlijn van het oppervlak naar het uitstromende water. Aan beide kanten is atmosferische druk in in dit onderdeel nemen we het wateroppervlak stationair. Dus $\frac{1}{2}v_{opp}^2 + gy_{opp} = \frac{1}{2}v_{uit}^2 + gy_{uit}$ en met $v_{opp}^2 = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}v_{uit}^2 = g(y_{opp} - y_{uit}) = gd$ dus $v_{uit} = \sqrt{2gd}$

c. Het volumen dat per seconde uitstroomd is hbv_{uit} . Het oppervlak van het water zakt dus met snelheid $v_{opp} = \frac{hbv_{uit}}{A}$ nu weer met Bernouilli: $\frac{1}{2}v_{opp}^2 + gy_{opp} = \frac{1}{2}v_{uit}^2 + gy_{uit}$ ofwel

$$g(y_{opp} - y_{uit}) = \frac{1}{2}v_{uit}^2 - \frac{1}{2}v_{opp}^2 \text{ en dus } 2gd = v_{uit}^2 - v_{opp}^2 = v_{uit}^2 - \left(\frac{hbv_{uit}}{A}\right)^2 = v_{uit}^2 \left(1 - \left(\frac{hb}{A}\right)^2\right) \text{ dus } v_{uit} = \sqrt{\frac{2gd}{1 - \left(\frac{hb}{A}\right)^2}}$$

d. Het volumen dat per seconde uitstroomt is $hbv_{uit} = hb\sqrt{2gd}$

Het totaal voolumen dat moet uitstromen is $\frac{1}{2}Ad$ dus $t = \frac{\frac{1}{2}Ad}{hb\sqrt{2gd}} = \frac{A}{hb} \sqrt{\frac{d}{8g}}$