

Tentamen Maat en Integratie

24 december 2010, 8.45-11.30

1. Beschouw een verzameling X met vier elementen: $X = \{1, 2, 3, 4\}$. Beschouw de collectie $\mathcal{A}$ van deelverzamelingen van X gegeven door

$$\mathcal{A} = \{\emptyset, \{1, 2, 3, 4\}, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{3, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}\}.$$

(a) Laat zien dat $\mathcal{A}$ een sigma-algebra is.

Laat $\mu : \mathcal{A} \rightarrow \{0, 1, 2, 3\}$ gegeven worden door

$$\mu(\emptyset) = 0, \mu(1, 2, 3, 4) = 3, \mu(1) = \mu(2) = \mu(3, 4) = 1,$$

en

$$\mu(1, 2) = \mu(1, 3, 4) = \mu(2, 3, 4) = 2.$$

(b) Laat zien dat μ een maat is.

We definiëren nu een “buitenmaat” μ^* op alle deelverzamelingen van X door

$$\mu^*(A) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n); A_n \in \mathcal{A}, A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right\}.$$

(c) Laat zien dat μ^* niet additief is.

2. Een functie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ wordt periodiek met periode T genoemd als $f(x+T) = f(x)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$.

(a) Laat zien dat wanneer $f \geq 0$ meetbaar en periodiek is met periode T , f van onderen benaderd kan worden door (meetbare) stapfuncties f_n , die ook allemaal periodiek met periode T zijn.

Stel A is een meetbare deelverzameling van $\mathbb{R}$ met de eigenschap dat $x \in A$ dan en slechts dan als $x+T \in A$, voor zekere (vaste) $T > 0$.

(b) Laat zien dat $m(A \cap [0, T]) = m(A \cap [a, a+T])$, voor alle $a \in \mathbb{R}$. Je mag hierbij gebruik maken van de translatie-invariantie van de Lebesgue maat m .

(c) Laat zien (door de gebruikelijke stappen en met behulp van (b)) dat als f integreerbaar en periodiek met periode T is, de volgende gelijkheid geldt voor alle $a \in \mathbb{R}$:

$$\int_{[0, T]} f dm = \int_{[a, a+T]} f dm.$$

3. Laat μ een maat zijn op $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$, met de sigma-algebra die bestaat uit alle deelverzamelingen van $\mathbb{N}$. Stel μ heeft de eigenschap dat

$$\mu(\{k\}) = \left(\frac{1}{2}\right)^k,$$

voor $k = 0, 1, 2, \dots$

(a) Leg uit waarom de maat μ hiermee volledig is vastgelegd. Wees heel precies met je argumenten.

(b) Bereken $\mu(A)$ waarbij A de collectie van alle even getallen is.

4. (a) Formuleer de gedomineerde convergentiestelling.

Stel $f \geq 0$ is een integreerbare functie op $\mathbb{R}$. Voor $r > 1$ definiëren we

$$f_r = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^n 1_{A_n},$$

waarbij $A_n = \{x \in \mathbb{R}; r^n \leq f(x) < r^{n+1}\}$.

(b) Laat zien dat $f_r \leq f$, voor alle $r > 1$, en dat voor $r \downarrow 1$, $f_r \rightarrow f$, bijna overal (met betrekking tot Lebesgue maat m).

(c) Waarom geldt $\int f_r dm \rightarrow \int f dm$, voor $r \downarrow 1$?

(d) Laat tenslotte zien dat

$$\int f dm = \lim_{r \downarrow 1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^n m(x; r^n \leq f(x) < r^{n+1}).$$

5. Laat f een Borel-meetbare functie zijn van $[0, 1]$ naar $[0, 1]$. De grafiek G van f wordt gedefinieerd door $G = \{(x, y); y = f(x)\}$ en wordt beschouwd als een deelverzameling van $[0, 1] \times [0, 1]$.

(a) We nemen eerst aan dat G in $\mathcal{B} \times \mathcal{B}$ zit. Laat met de stelling van Fubini zien dat onder die aanname geldt dat $(m \times m)(G) = 0$.

In de rest van de opgave gaan we laten zien dat G inderdaad in $\mathcal{B} \times \mathcal{B}$ zit. We definiëren een functie $g : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1] \times [0, 1]$ door $g(x, y) = (f(x), y)$.

(b) Laat zien dat voor een "rechthoek" $A \times B$, met zowel A als B in de Borel sigma-algebra $\mathcal{B}$, geldt dat $g^{-1}(A \times B) \in \mathcal{B} \times \mathcal{B}$.

(c) Laat zien dat de collectie van verzamelingen E waarvoor geldt $g^{-1}(E) \in \mathcal{B} \times \mathcal{B}$ een sigma-algebra is.

(d) Concludeer uit (a) en (b) dat de functie g meetbaar is ten opzichte van de product Borel sigma-algebra $\mathcal{B} \times \mathcal{B}$.

(e) Laat zien dat G het inverse beeld is van $\{(x, y); y = x\}$ en concludeer dat G meetbaar is in de product sigma-algebra.