

Tweede deeltentamen Maat en Integratie

14 december 2009; 8.45-10.45

Alle onderdelen tellen even zwaar mee in de beoordeling.

1. Stel dat μ een eindige maat is op $(\Omega, \mathcal{F})$. Beschouw een rij meetbare functies $f_1, f_2, \dots$ van $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ zodanig dat $|f_n(x)| \leq C$ voor alle n en alle $x \in \Omega$, waarbij C een willekeurige constante voorstelt. Stel dat $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ voor μ -bijna alle $x \in \Omega$.

(a) Gebruik een van de bekende convergentie stellingen om te laten zien dat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n d\mu = \int_{\Omega} f d\mu.$$

(b) Laat met een voorbeeld zien dat de conclusie niet meer waar hoeft te zijn als μ geen eindige maat is.

2. Beschouw Lebesgue maat m op $\mathcal{B}$. Laat bovendien een integreerbare functie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven zijn. Bedenk dat we kunnen schrijven: $f = f^+ - f^-$ en $|f| = f^+ + f^-$ waarin $f^+ = \max\{f, 0\}$ en $f^- = \max\{-f, 0\}$.

(a) Laat zien dat $|\int_E f dm| \leq \int_E |f| dm$ voor alle $E \in \mathcal{B}$.

Stel nu dat f continu is, en beschouw de functie

$$g(x) = \int_{(-\infty, x]} f dm.$$

(b) Laat zien dat voor $h > 0$ geldt dat $g(x+h) - g(x) = \int_{[x, x+h]} f dm$.

(c) Laat zien dat

$$\left| \frac{1}{h} \int_{[x, x+h]} f dm - f(x) \right| \leq \sup\{|f(y) - f(x)|; x \leq y \leq x+h\},$$

en leidt hieruit af dat de rechter afgeleide van g in het punt x gelijk is aan $f(x)$.

3. Laat Ω_1 een ruimte zijn met sigma-algebra $\mathcal{F}_1$, en Ω_2 een ruimte met sigma-algebra $\mathcal{F}_2$. Laat $T : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ een meetbare afbeelding zijn en μ_1 een maat op $\mathcal{F}_1$. Definieer, voor alle $E \in \mathcal{F}_2$,

$$\mu_2(E) = \mu_1\{x \in \Omega_1 : T(x) \in E\}.$$

- (a) Laat zien dat μ_2 een maat is op $\mathcal{F}_2$.
 (b) Voor $E \in \mathcal{F}_2$, laat 1_E de indicatorfunctie zijn van E ; dat wil zeggen dat $1_E(y) = 1$ als $y \in E$ en $1_E(y) = 0$ als $y \notin E$. Laat zien dat

$$\int_{\Omega_1} 1_E(T(x)) d\mu_1(x) = \int_{\Omega_2} 1_E(y) d\mu_2(y).$$

- (c) Laat zien dat

$$\int_{\Omega_1} f(T(x)) d\mu_1(x) = \int_{\Omega_2} f(y) d\mu_2(y),$$

voor alle meetbare niet-negatieve functies $f : \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}$.

- (d) Laat tenslotte zien dat f integreerbaar is t.o.v. μ_2 dan en slechts dan als $f(T)$ integreerbaar is t.o.v. μ_1 , en dat in dat geval de formule onder (c) nog steeds geldt.

4. Laat μ_1 en ν_1 eindige maten op $(\Omega_1, \mathcal{F}_1)$ zijn, en μ_2 en ν_2 eindige maten op $(\Omega_2, \mathcal{F}_2)$. Verder geldt voor elke $A_1 \in \mathcal{F}_1$ dat $\nu_1(A_1) = \int_{A_1} f d\mu_1$, en voor elke $A_2 \in \mathcal{F}_2$ dat $\nu_2(A_2) = \int_{A_2} g d\mu_2$. Merk op dat f en g de respectievelijke Radon-Nikodym afgeleides zijn. We beschouwen nu de productmaten $\nu = \nu_1 \times \nu_2$ en $\mu = \mu_1 \times \mu_2$ op $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$. Laat $h(x, y) = f(x)g(y)$; h is dus een functie van $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

- (a) Laat met behulp van de stelling van Fubini zien dat

$$\nu(A_1 \times A_2) = \int_{A_1 \times A_2} h d\mu.$$

- (b) Laat zien dat

$$\mathcal{H} = \{A \in \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2; \nu(A) = \int_A h d\mu\}$$

een monotone klasse is.

- (c) Formuleer de monotone klasse stelling.
 (d) Gebruik de monotone klasse stelling om aan te tonen dat voor elke $A \in \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ geldt dat

$$\nu(A) = \int_A h d\mu.$$

- (e) Leg uit waarom $\nu \ll \mu$.