

○●*★•*★●○•○●*★•*★●○•○●*★•*★●○•○●*★•*★●○•○●*★•*★●○•○●*★•*★●○•○●*★•*★●○•○●*★•*★●○

- (i). Is $\{b\} \in r(\mathcal{H})$ voor $b \in \mathbb{Q}$? Laat zien dat $\{b\} \in \sigma(\mathcal{H})$ voor $b \in \mathbb{Q}$, en bepaal $\sigma(\mathcal{H})$.
- (ii). Bepaal $\mu^*(\{b\})$ voor $b \in \mathbb{Q}$, met μ^* de uitwendige maat bij μ .
- (iii). Formuleer de Uitbreidingsstelling van Carathéodory, en maak de daarin voorkomende σ -algebra en maat expliciet voor het onderhavige geval.
- (iv). De beperking van de maat uit (iii) tot $\sigma(\mathcal{H})$ is een maat die op $\mathcal{H}$ samenvalt met μ . Is er nog een andere maat op $\sigma(\mathcal{H})$ met deze eigenschap?

(v). Als ν een premaat op $\mathcal{H}$ is, wat zou dan de maat zijn die de Carathéodoryvoortzetting van ν op $\sigma(\mathcal{H})$ toekent aan $\{b\}$ voor $b \in \mathbb{Q}$? Waarom kan dat niet?

(vi). Laat door middel van een tegenvoorbeeld zien dat ν niet σ -sub-additief is op $\mathcal{H}$.

- (i). Welke rol speelt bij dit convergentiebegrip de meetbaarheid der functies?
- (ii). Laat ook g een meetbare, reële functie zijn op V . Bewijs dan: Als $f_n \xrightarrow{\mu} f$ en ook $f_n \xrightarrow{\mu} g$, dan is $\mu(\{|f - g| \geq \varepsilon\}) = 0$ voor alle $\varepsilon > 0$, en laat zien dat deze laatste bewering over f en g niet alleen voldoende is voor ' $f = g$ μ -b.o.' maar ook noodzakelijk. Welke gewenste eigenschap van ' $\xrightarrow{\mu}$ ' is nu bewezen?
- iii). Bewijs ook de volgende eigenschap van convergentie in maat:

voor alle functies $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die *Lipschitz-continu* zijn, d.w.z. (per definitie) waarvoor er een $c \geq 0$ is zó dat $|\phi(y) - \phi(z)| \leq c|y - z|$ voor alle $y, z \in \mathbb{R}$.

$$I_n := \mathcal{R}\text{-}\int_0^n (1 - x/n)^n e^{\frac{1}{2}x} dx,$$

- (i). Laat zien dat dit mogelijk is; geef F expliciet weer.
- (ii). Laat zien dat er een naar m_F integreerbare functie g is op $\mathbb{R}_+$ zó dat voor alle $n \in \mathbb{N}$: $f_n(x) \leq g(x)$ voor $x \in \mathbb{R}_+$. Aanwijzing: $\log(1-t) \leq -t$ voor $t \in [0, 1)$.
- iii). Laat zien dat de limiet I inderdaad bestaat, en bepaal I .

Opgave 4. Zij $(V, \mathcal{A}, \mu)$ een maatruimte, en zij $g : V \rightarrow \mathbb{R}_+$ een meetbare functie.

- (i). Geef een bewijs (in drie gebruikelijke stappen) van de *substitutie-regel* voor een *niet-negatieve* meetbare functie f op $\mathbb{R}_+$:

$$\int_V f \circ g \, d\mu = \int_{\mathbb{R}_+} f \, d\mu_g \quad [\mu_g := \text{beeldmaat van } \mu \text{ onder } g].$$

- (ii). Zij $C := \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : x > y\}$. Laat zien dat $C \in \mathcal{B}or(\mathbb{R}_+^2)$ en (antwoord volstaat) dat $\mathcal{B}or(\mathbb{R}_+^2)$ een product- σ -algebra is, en bewijs dat voor $x \geq 0$

$$\int_{\mathbb{R}_+} 1_C(x, y) \, m(dy) = x \quad [m := \text{Borel-maat voor } \mathbb{R}_+].$$

- (iii). Neem voor f in (i) de identiteit, dus $f(x) = x$ voor $x \in \mathbb{R}_+$. Laat dan met behulp van (ii) zien dat onder een (zelf te bedenken) additionele voorwaarde ten aanzien van μ en g het volgende geldt:

$$\int_V g \, d\mu = \int_0^\infty \mu(\{g > y\}) \, dy.$$

Opgave 5. Beschouw in de bekende maatruimte $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^2), m_2)$ de halve strook

$$C := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, y \geq 0\}.$$

- (i). Laat zien dat $C \in \mathcal{B}or(\mathbb{R}^2)$ op twee manieren: (a) met de definitie van $\mathcal{B}or(\mathbb{R}^2)$; (b) door slechts gebruik te maken van het feit dat $\mathcal{B}or(\mathbb{R}^2)$ de σ -algebra is voortgebracht door de cellen in $\mathbb{R}^2$.

Laat de functie $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ op C gedefinieerd zijn door

$$f(x, y) := e^{-y} \sin 2xy \quad [(x, y) \in C].$$

- (ii). Laat zien dat f m_2 -integreerbaar is over C , en bepaal met behulp van het feit dat $\int_{\mathbb{R}_+} e^{-y} \sin \alpha y \, dy = \alpha / (1 + \alpha^2)$ voor $\alpha \in \mathbb{R}$, de m_2 -integraal van f over C .

○ ● * ★ * ★ * ● ○ ○ ● * ★ * ★ * ● ○ ○ ● * ★ * ★ * ● ○ ○ ● * ★ * ★ * ● ○ ○ ● * ★ * ★ * ● ○ ○ ● * ★ * ★ * ● ○

NORMERING:	1 (i): 2	2 (i): 1	3 (i): 2	4 (i): 3	5 (i): 2	TOTAAL:
	(ii): 1	(ii): 4	(ii): 2	(ii): 2	(ii): 4	38 punten!
	(iii): 2	(iii): 2	(iii): 2	(iii): 3		
	(iv): 1	(iv): 1				EINDCIJFER:
	(v): 2					$1 + \frac{1}{4} \times \text{totaal.}$
	(vi): $\frac{2}{10}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{2}{6}$	

○ ● * ★ * ★ * ● ○ ○ ● * ★ * ★ * ● ○ ○ ● * ★ * ★ * ● ○ ○ ● * ★ * ★ * ● ○ ○ ● * ★ * ★ * ● ○ ○ ● * ★ * ★ * ● ○