

Tentamen Maat- en Integratietheorie

[illegible]

Opgave 1. Zij μ een premaat op een halfring $\mathcal{H}$ in V , en laat μ^* de uitwendige maat zijn bij μ . Zoals bekend, is μ^* monotoon, σ -sub-additief en een voortzetting van μ .

- (i). Geef precies aan wat deze drie eigenschappen van μ^* inhouden.
- (ii). Bewijs: Als $E \subset V$ met $\mu^*(E) = 0$, dan is $E \in \mathcal{H}_\mu$, dit is de collectie der μ^* -meetbare verzamelingen in V .
- (iii). Bewijs: Als $E \subset V$ met $\mu^*(E) = 0$, dan is $E \subset A$ voor een $A \in \sigma(\mathcal{H})$ waarvoor $\mu^*(A) = 0$. Aanwijzing: Laat eerst voor E met $\mu^*(E) = 0$ zien dat er voor iedere $n \in \mathbb{N}$ een $\mathcal{H}$ -overdekking $(A_{n,i})_{i \in \mathbb{N}}$ van E is zó dat $\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_{n,i}) < 1/n$.
- (iv). Formuleer de uitbreidingsstelling van Carathéodory voor het drietal $(V, \mathcal{H}, \mu)$, en vermeld de twee uit deze stelling voortvloeiende maatruimten expliciet.
- (v). Probeer de in (ii) en (iii) bewezen implicaties zoveel mogelijk te herformuleren in termen van nulverzamelingen in de twee maatruimten van (iv).

Opgave 2. Zij $(V, \mathcal{A}, \mu)$ een maatruimte met $\mu(V) > 0$, en zij $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ een rij meetbare functies van V naar $\mathbb{R}$.

- (i). Laat met behulp van twee bekende karakteriseringen van meetbaarheid zien dat ook $\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n$ meetbaar is, en formuleer het *lemma van Fatou* voor (f_n) .
- (ii). Formuleer (de overal-versie van) de GCS voor de rij (f_n) .

Zij ϕ een niet-negatieve, meetbare functie op V met $\int_V \phi \, d\mu \in (0, \infty)$ en zij $\alpha > 0$. Laat verder de functies f_n gedefinieerd zijn door

$$f_n(x) := n \log (1 + (\phi(x)/n)^\alpha) \quad [x \in V].$$

- (iii). Laat zien dat $f := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ bestaat en bepaal f ; maak hierbij gebruik van het feit dat $(\log(1+s))/s \rightarrow 1$ als $s \rightarrow 0$, en onderscheid drie gevallen met betrekking tot α .
- (iv). Laat met (i) of (ii) zien dat ingeval $\alpha < 1$ geldt: $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_V f_n \, d\mu = \infty$.
- (v). Laat $\alpha \geq 1$; dan is $\log(1+t^\alpha) \leq \alpha t$ voor $t \geq 0$. Laat met behulp hiervan en van (i) of (ii) zien dat $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_V f_n \, d\mu$ bestaat en bepaal de waarde van deze limiet.

ZOZ

(i). Laat zien dat $g(\mathcal{B}or(V)) = \mathcal{B}or(\mathbb{R}^2)$, en dat de beeldmaat van μ onder g gelijk is aan m_2 , dus $\mu_g = m_2$.

$$g(r, \phi) := (r \cos \phi, r \sin \phi) \quad [(r, \phi) \in V].$$

- $$\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) \, dx dy = \int_V f(r \cos \phi, r \sin \phi) r \, dr d\phi.$$

- $$F(x) = x^2, \quad G(x) = -\log(1 - x) \quad [x \in V].$$

- (i). Laat zien dat m_F en m_G σ -eindig zijn op $\mathcal{A}$.
- (ii). Laat met het feit dat $((\mathcal{B}or(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}or(\mathbb{R}))_{V \times V} = \mathcal{B}or(\mathbb{R})_V \otimes \mathcal{B}or(\mathbb{R})_V$ zien dat $C := \{(x, y) \in V^2 : y < x\}$ meetbaar is: $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$.
- (iii). Bepaal $(m_F \otimes m_G)(C)$ voor C uit (ii).

○●✱★・✱✱●○・○●✱★・✱✱●○・○●✱★・✱✱●○・○●✱★・✱✱●○・○●✱★・✱✱●○・○●✱★・✱✱●○・○●✱★・✱✱●○

[illegible]