



Tentamen Maat- en Integratietheorie

[illegible]

Opgave 1. Zij μ een premaat op een halfring $\mathcal{H}$ in V , en laat μ^* de uitwendige maat zijn bij μ .

- (i). Zoals bekend, is μ *monotoon* op $\mathcal{H}$. Bewijs hiermee in het speciale geval dat $\mathcal{H}$ een *ring* is, de bekende eigenschap dat μ ook *σ -sub-additief* is op $\mathcal{H}$. Aanwijzing: onderscheid twee gevallen.
- (ii). Bewijs met behulp van (i) de bekende eigenschap dat $\mu^*(E) = \mu(E)$ voor $E \in \mathcal{H}$.

Veronderstel verder dat E een deel is van V met $\mu^*(E) < \infty$.

- (iii). Laat met de (bekende) σ -sub-additiviteit van μ^* zien dat er voor iedere $\varepsilon > 0$ een $A \in \sigma(\mathcal{H})$ is met $A \supset E$ zó dat $\mu^*(A) < \mu^*(E) + \varepsilon$.
- (iv). Laat met behulp van (iii) en met de (bekende) *monotonie* van μ^* zien dat er een $B \in \sigma(\mathcal{H})$ is met $B \supset E$ zó dat $\mu^*(B) = \mu^*(E)$.

Neem nu, bij onze E , een verzameling B zoals in (iv).

- (v). Formuleer de *uitbreidingsstelling* van Carathéodory, en laat daarmee zien dat als E μ^* -meetbaar is, de ‘schil’ $B \setminus E$ de eigenschap heeft dat $\mu^*(B \setminus E) = 0$.
- (vi). Geef een voorbeeld, van V , $\mathcal{H}$, μ , E en B , waarvoor $\mu^*(B \setminus E) > 0$.

Opgave 2. Zij $(V, \mathcal{A})$ en $(W, \mathcal{B})$ twee meetbare ruimten.

- (i). Laat $f : V \rightarrow W$. Wat wordt verstaan onder de *beeld- σ -algebra* van $\mathcal{A}$ en de *inverse-beeld- σ -algebra* van $\mathcal{B}$ onder f ? Bewijs nu, door geschikte keuze van $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$, de bekende eigenschap dat $f^{-1}(\sigma(\mathcal{C})) = \sigma(f^{-1}(\mathcal{C}))$ voor $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(W)$.

Laat verder $(W, \mathcal{B}) = (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{Bor}(\overline{\mathbb{R}}))$, en zij $f_n : V \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ $\mathcal{A}$ -meetbaar voor $n \in \mathbb{N}$.

- (ii). Leid uit (i) twee (bekende) meetbaarheidscriteria af waarmee eenvoudig kan worden aangetoond dat ook $\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n$ $\mathcal{A}$ -meetbaar is.

Laat $(V, \mathcal{A}) = (\mathbb{R}, \mathcal{Bor}(\mathbb{R}))$, zij m de Borel-maat hierop, en laat voor zekere $\alpha \in (0, 1]$

$$f_n(x) := (1 + (|x|/n)^\alpha)^n \quad [x \in \mathbb{R}].$$

- (iii). Laat $\alpha < 1$. Laat dan met het feit dat $(\log(1+t))/t \rightarrow 1$ als $t \rightarrow 0$, zien dat $\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \infty$ voor $x \neq 0$. Wat is nu $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{(-1,1)} f_n \, dm$?
- (iv). Bepaal $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{(-1,1)} f_n \, dm$ ook ingeval $\alpha = 1$.

Opgave 3. Beschouw de maatruimte $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \nu)$ met $\nu(B) = \sum_{k \in B} p_k$ voor $B \subset \mathbb{N}$, waarbij $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ een rij is in $\mathbb{R}_+$.

- (i). Laat, met de MCS, zien dat een functie $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ *integreerbaar* is naar ν als en alleen als $\sum_{k=1}^{\infty} |\phi(k)| p_k < \infty$, en bewijs, met de GCS, dat in dat geval

$$\int_{\mathbb{N}} \phi \, d\nu = \sum_{k=1}^{\infty} \phi(k) p_k.$$

