



Opgave 2. Toon aan: Een *algebra* $\mathcal{A}$ die gesloten is onder aftelbare, *disjuncte* verenigingen, is een σ -algebra. (2)

Opgave 3. Formuleer expliciet en bewijs de bekende eigenschap dat $\mathcal{Bor}(\mathbb{R})$ gesloten is onder *spiegelingen*. (2)

Opgave 4. Zij μ een niet-negatieve, eindig-additieve functie op een ring $\mathcal{R}$ in V . Bepaal de verzamelingen $B \in \mathcal{R}$ waarvoor geldt: $\mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(B)$ voor alle $A \in \mathcal{R}$ met $A \supset B$. (2)

Opgave 5. Zij μ een niet-negatieve, eindig-additieve functie op een halfring $\mathcal{H}$ in V ; zoals bekend, is μ dan ook *uitgebreid-monotoon* op $\mathcal{H}$. Wat betekent dit, en hoe kunnen we daarmee laten zien dat σ -*additiviteit* van μ op $\mathcal{H}$ geïmpliceerd wordt door (en dus equivalent is met) σ -*sub-additiviteit* van μ op $\mathcal{H}$? (2)

Opgave 6. Beschouw in $\mathbb{Q}$ de halfring $\mathcal{H}$ der cellen $(a, b]_{\mathbb{Q}} := (a, b] \cap \mathbb{Q}$ met $a, b \in \mathbb{Q}$, en definieer op $\mathcal{H}$ de functie μ door $\mu((a, b]_{\mathbb{Q}}) := b - a$. Bewijs dat μ geen premaat is op $\mathcal{H}$. (2)

Opgave 7. Zij μ^* de uitwendige maat bij een premaat μ op een halfring $\mathcal{H}$ in V . Zoals bekend, is $\mu^* = \mu$ op $\mathcal{H}$ en is μ^* sub-additief. Bewijs nu met behulp hiervan de bekende eigenschap dat elke $E \in \mathcal{H}$ μ^* -meetbaar is. Op grond waarvan volgt hieruit dat ook elke $E \in \sigma(\mathcal{H})$ μ^* -meetbaar is? (3)

Opgave 8. Geef een precieze formulering van de *uitbreidingsstelling* van Carathéodory (voor een premaat μ op een halfring $\mathcal{H}$ in V), en vermeld kort (geen bewijzen) de vijf stappen waarin deze stelling bewezen wordt. (2)

Opgave 9. Beschouw in $\mathbb{Q}$ de halfring $\mathcal{H}$ der cellen $(a, b]_{\mathbb{Q}} := (a, b] \cap \mathbb{Q}$ met $a, b \in \mathbb{Q}$. Zij ν de *telmaat* voor $\mathbb{Q}$, en noteer met μ de beperking van ν tot $\mathcal{H}$. Bepaal dan $\sigma(\mathcal{H})$ en de Carathéodory-voortzetting van μ tot op $\sigma(\mathcal{H})$. Conclusie? (3)

Opgave 10. Beschouw de bekende maatruimte $(\mathbb{R}, \mathcal{B}or(\mathbb{R}), m)$. Zoals bekend, is $\mathcal{B}or(\mathbb{R})$ gesloten onder spiegelingen. Laat nu met de *eenduidigheidsstelling* voor maatuitbreiding zien dat $m(-A) = m(A)$ voor alle $A \in \mathcal{B}or(\mathbb{R})$. (2)

Opgave 11. Zij $F : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ de functie met $F(2) = 1$ en

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x & , \text{ als } x \in [0, 1), \\ \frac{1}{2} & , \text{ als } x \in [1, 2). \end{cases}$$

Dan zijn er verschillende (Stieltjes-) maten m_F op $\mathcal{Bor}([0, 2])$ met $m_F((a, b]) = F(b) - F(a)$ voor $a, b \in [0, 2]$ met $a < b$. Maak zelf een keuze voor m_F , en bepaal dan $m_F(\{1\})$, $m_F([\frac{1}{2}, \frac{3}{2}])$, $m_F([1, 2])$ en $m_F([0, 1])$. Antwoorden volstaan. (3)

Opgave 12. Laat in de Carathéodory-maatruimte $(V, \mathcal{H}_\mu, \bar{\mu})$ bij een premaat μ op een halfring $\mathcal{H}$ in V zien dat iedere *nulverzameling* uitwendige maat nul heeft. (1)

Opgave 13. Laat $(V, \mathcal{A})$ en $(W, \mathcal{B})$ twee meetbare ruimten zijn, en zij $f : V \rightarrow W$.

- (i). Als $\mathcal{B}$ wordt voortgebracht door $\mathcal{C}$, door welke collectie wordt de inverse-beeld- σ -algebra van $\mathcal{B}$ onder f dan voortgebracht? Bewijs dit. (3)
- (ii). Welke nuttige voldoende (en ook nodige) voorwaarde voor $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ -meetbaarheid van f volgt uit (i)? (1)

Opgave 14. Bewijs: iedere functie $f : \mathbb{Q} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ is Borel-meetbaar. (1)

Opgave 15. *Meetbaarheid (van functies) blijft behouden onder de operatie ‘aftelbaar infimum’.* Formuleer deze bewering explicieter, en geef vervolgens een bewijs met behulp van een bekend meetbaarheids criterium. (2)

Opgave 16. Zij $(V, \mathcal{A})$ een meetbare ruimte, en laat f en g twee $\mathcal{A}$ -meetbare functies zijn van V naar $\overline{\mathbb{R}}$. Bewijs de bekende eigenschap dat dan $\{f \leq g\} \in \mathcal{A}$. (2)

Opgave 17. Zij $(V, \mathcal{A})$ een meetbare ruimte, en laat A, B en C niet-lege delen van V zijn met $A \cup B \neq V$, $A \cap B = \emptyset$, $B \supset C$, $B \neq C$. Bepaal de standaard-voorstelling van de stapfunctie $f = 21_A + 1_B + 1_C$. Wanneer is f nu meetbaar? (2)

Opgave 18. Zij $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ een rij van meetbare delen van een maatruimte $(V, \mathcal{A}, \mu)$ met μ eindig. Beschouw hierbij $\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n := \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n$. Bewijs:

$$\mu(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n) = 0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = 0.$$

Welke relatie tussen *bijna-overal convergentie* en *convergentie in maat* kan hiermee (vrijwel) onmiddellijk bewezen worden? (3)

○ ● * ★ • ★ * ● ○ • ○ ● * ★ • ★ * ● ○ • ○ ● * ★ • ★ * ● ○ • ○ ● * ★ • ★ * ● ○ • ○ ● * ★ • ★ * ● ○ • ○ ● * ★ • ★ * ● ○

TOTAAL AANTAL PUNTEN: $\Sigma = 40$. EINDCIJFER: $V = \frac{1}{4} \times \Sigma$.

○ ● * ★ • ★ * ● ○ • ○ ● * ★ • ★ * ● ○ • ○ ● * ★ • ★ * ● ○ • ○ ● * ★ • ★ * ● ○ • ○ ● * ★ • ★ * ● ○ • ○ ● * ★ • ★ * ● ○