

○●✱✱・✱✱●○・○●✱✱・✱✱●○・○●✱✱・✱✱●○・○●✱✱・✱✱●○・○●✱✱・✱✱●○・○●✱✱・✱✱●○・○●✱✱・✱✱●○・○●✱✱・✱✱●○

(i). Laat zien dat $\sigma(\mathcal{H})$ gegeven wordt door de collectie van alle $A \subset V$ met A of A^c aftelbaar.

(ii). Laat zien dat μ een premaat is op $\mathcal{H}$, en bepaal de unieke voortzetting van μ tot een maat op $\sigma(\mathcal{H})$.

(iii). Bewijs dat f $\sigma(\mathcal{H})$ -meetbaar is, en laat zien dat en hoe de integraal van f naar μ te schrijven is in termen van de functiewaarden op D .

(i). Geef kort aan waarom er een maat m_F is op $\mathcal{B}or(\mathbb{R})$ met de eigenschap dat $m_F((a, b]) = F(b) - F(a)$ voor $a < b$, en waarom er maar één zo'n maat is.

(iii). Laat zien dat de Stieltjes-maten m_F en m_G uit (i) en (ii) voldoen aan

met $\alpha = 2c$; doe dit eerst voor cellen en vervolgens, met behulp van twee geschikte uitwendige maten, voor willekeurige Borel-verzamelingen.

(iv). Bepaal, ingeval F strikt stijgend is, de kleinste $\alpha > 0$ waarvoor ongelijkheid (*) in (iii) geldt.

(v). Geef een voorbeeld van een F zó dat voor de in (iv) beschouwde kleinste α geldt: $\alpha = \frac{3}{2}c$.

(i). Bewijs voor meetbare $f : V \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$: $f = 0$ μ -b.o. $\implies \int_V f \, d\mu = 0$. Doe dit in (gebruikelijke) drie stappen: eerst voor een indicator-functie f , dan voor een stapfunctie f , tenslotte voor willekeurige $f \in \overline{\mathcal{M}}_+$.

(ii). Bewijs de bekende eigenschap dat $\nu(A) = 0$ voor alle $A \in \mathcal{A}$ met $\mu(A) = 0$.

(iii). Bepaal $\int_{[-1,1] \cap \mathbb{Q}^c} x \nu(dx)$ ingeval $(V, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbb{R}, \text{Bor}(\mathbb{R}), m)$, met m de Borelmaat, en $g(x) = 1$ als $x < 0$, en $g(x) = 2x$ als $x \geq 0$.

Opgave 4. Zij $f, f_1, f_2, \dots$ niet-negatieve $\mathcal{L}^1$ -functies bij een maatruimte $(V, \mathcal{A}, \mu)$. We zijn geïnteresseerd in voorwaarden waaronder de volgende implicatie geldt:

$$f_n \rightarrow f \text{ } \mu\text{-b.o.} \implies \int_V |f_n - f| d\mu \rightarrow 0 \quad [n \rightarrow \infty]. \quad (*)$$

- (i). Laat door middel van een voorbeeld (ook van een maatruimte) zien dat implicatie (*) zonder verdere voorwaarden níet geldt.
- (ii). Geef de voorwaarden waaronder volgens de bijna-overal versie van de GCS implicatie (*) wél geldt.

Veronderstel verder dat de niet-negatieve functies $f, f_1, f_2, \dots$ kansdichtheden zijn in de zin dat

$$\int_Y f \, d\mu = 1, \quad \int_Y f_n \, d\mu = 1 \quad \text{voor alle } n.$$

- (iii). Zet $A_n := \{f_n \leq f\}$. Laat door een drievoudig gebruik van de partitie $\{A_n, A_n^c\}$ van V zien dat $\int_V |f_n - f| \, d\mu = 2 \int_{A_n} (f - f_n) \, d\mu$.
- (iv). Bewijs implicatie (*) met behulp van (iii).

Opgave 5.

- (i). Formuleer de stelling van Fubini voor niet-negatieve functies, en geef kort (zonder bewijzen) aan waarom deze stelling gebruikt kan worden wanneer we een Borel-meetbare functie op $\mathbb{R}^2$ willen integreren naar de Borel-maat m_2 .

Zij $0 < a < b$. We zijn geïnteresseerd in de waarde van de oneigenlijke Riemann-integraal I gedefinieerd door

$$I := \mathcal{R}\text{-}\int_0^\infty (e^{-ay} - e^{-by}) \frac{1}{y} \, dy.$$

- (ii). Laat zien dat I alleen oneigenlijk is in ∞ (en bijvoorbeeld niet in 0) en dat I *convergent* is.
- (iii). Bepaal I door gebruik te maken van (i), toegepast op de functie $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ met

$$f(x, y) := \begin{cases} e^{-xy} & , \text{ als } (x, y) \in (a, b) \times \mathbb{R}_+, \\ 0 & , \text{ elders.} \end{cases}$$

○●✱★•✱✱●○•○●✱★•✱✱●○•○●✱★•✱✱●○•○●✱★•✱✱●○•○●✱★•✱✱●○•○●✱★•✱✱●○•○●✱★•✱✱●○

NORMERING:	1 (i): 2	2 (i): 2	3 (i): 2	4 (i): 1	5 (i): 2	TOTAAL:
	(ii): 3	(ii): 1	(ii): 1	(ii): 1	(ii): 2	38 punten!
	(iii): 3	(iii): 3	(iii): 3	(iii): 3	(iii): 4	
		(iv): 2		(iv): 2		EINDCIJFER:
		(v): 1				$1 + \frac{1}{4} \times \text{totaal.}$
	<u>8</u>	<u>9</u>	<u>6</u>	<u>7</u>	<u>8</u>	

○●✱✱•✱✱●○•○●✱✱•✱✱●○•○●✱✱•✱✱●○•○●✱✱•✱✱●○•○●✱✱•✱✱●○•○●✱✱•✱✱●○