

[illegible]

- (i). Laat slechts met de definitie van  $\mathcal{B}or(\mathbb{R})$  zien dat  $[a, b) \in \mathcal{B}or(\mathbb{R})$  voor  $a < b$ .
- (ii). Bewijs met behulp van (i) dat  $-A \in \mathcal{B}or(\mathbb{R})$  voor alle  $A \in \mathcal{B}or(\mathbb{R})$ .
- (iii). Formuleer de eenduidigheidsstelling voor maten op  $\sigma(\mathcal{H})$  met  $\mathcal{H}$  een halfring in  $\mathbb{R}$ , en laat hiermee zien dat  $m$  *spiegeling-invariant* is in de zin dat (de bewering in (ii) geldt en)  $m(-A) = m(A)$  voor alle  $A \in \mathcal{B}or(\mathbb{R})$ .

(iv). Geef precies aan hoe  $\mathcal{L}eb(\mathbb{R})$  en  $\overline{m}$  gedefinieerd zijn.

(v). Ook  $\overline{m}$  is *spiegelings-invariant*. Hoe zouden we dat kunnen laten zien? Geef alleen de methode en de aan te tonen beweringen, geen precieze bewijzen.

(i). Bewijs:  $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$  voor  $A, B \in \mathcal{R}$ .  
(ii). Bewijs:  $\mu^*(E \cup F) + \mu^*(E \cap F) = \mu^*(E) + \mu^*(F)$  voor  $\mu^*$ -meetbare  $E \subset V$  en willekeurige  $F \subset V$ . Aanwijzing: neem twee geschikte ‘testverzamelingen’.

$$I_n := \mathcal{R} \int_0^1 \frac{-\log x}{(1-x/n)^n} dx$$

- (i). Laat zien dat  $\mu$  een kansmaat is.
- (ii). Laat zien dat  $I_n$  als een integraal naar  $\mu$  geschreven kan worden, en toon vervolgens met behulp van de GCS aan dat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \int_{(0,1]} e^x \mu(dx).$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot n!}.$$

**Opgave 4.** Zij  $g : (\mathbb{R}, \mathcal{B}or(\mathbb{R}), m) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}or(\mathbb{R}))$  meetbaar, en zij  $m_g$  de beeldmaat van  $m$  onder  $g$ . Dan geldt, zoals bekend, voor alle meetbare  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ :

$$\int_{\mathbb{R}} f \circ g \, dm = \int_{\mathbb{R}} f \, dm_g.$$

- (i). Bewijs deze *substitutieregel* voor niet-negatieve  $f$  in drie stappen.  
(ii). Laat door een speciale keuze van  $g$  en met de *spiegeling-invariantie* van  $m$  zien dat er voor iedere  $V \in \mathcal{B}or(\mathbb{R})$  een  $W \in \mathcal{B}or(\mathbb{R})$  is (geef  $W$  expliciet aan) zó dat voor meetbare  $f : W \rightarrow \mathbb{R}_+$ :

$$\int_V f(-x) \, m(dx) = \int_W f(y) \, m(dy).$$

- (iii). Beschouw een meetbare functie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  die *oneven* is, d.w.z.  $f(-x) = -f(x)$  voor  $x \in \mathbb{R}$ . Laat dan met behulp van (ii) zien dat  $f$  een integraal heeft als en alleen als  $\int_{\mathbb{R}} f^+ \, dm < \infty$ , dat dit equivalent is met  $\int_{(0,\infty)} f^+ \, dm < \infty$  én  $\int_{(0,\infty)} f^- \, dm < \infty$ , en dat dan  $\int_{\mathbb{R}} f \, dm = 0$ .

**Opgave 5.** Zij  $(V, \mathcal{A}, \mu)$  en  $(W, \mathcal{B}, \nu)$  twee maatruimten met  $\mu$  en  $\nu$   $\sigma$ -eindig. Laat  $g : V \rightarrow \mathbb{R}$  en  $h : W \rightarrow \mathbb{R}$  twee meetbare functies zijn, en definieer hierbij de functie  $f$  op  $V \times W$  door

$$f(x, y) := g(x) h(y) \quad [(x, y) \in V \times W].$$

- (i). Laat zien dat  $f$  meetbaar is met betrekking tot  $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ .  
Laat verder  $g$  integreerbaar zijn naar  $\mu$  en  $h$  integreerbaar naar  $\nu$ .  
(ii). Bewijs:  $f$  is integreerbaar naar de productmaat  $\mu \otimes \nu$ .  
(iii). Laat zien dat de integraal van  $f$  als volgt in die van  $g$  en die van  $h$  kan worden uitgedrukt:

$$\int_{V \times W} f \, d(\mu \otimes \nu) = \left( \int_V g \, d\mu \right) \left( \int_W h \, d\nu \right).$$

Zij  $m_F$  de Stieltjes-maat op  $\mathcal{B}or(\mathbb{R})$  geïnduceerd door  $F := \frac{1}{2} 1_{[0,\infty)} + \frac{1}{2} 1_{[1,\infty)}$ , en  $m_G$  die op  $\mathcal{B}or((0, \infty))$  geïnduceerd door  $G$  met  $G(x) := 1 - e^{-x}$  voor  $x > 0$ .

- (iv). Bepaal

$$\int_{\mathbb{R} \times (0, \infty)} x y \, dF(x) \, dG(y).$$

○ ● \* ★ • \* ★ ● ○ • ○ ● \* ★ • \* ★ ● ○ • ○ ● \* ★ • \* ★ ● ○ • ○ ● \* ★ • \* ★ ● ○ • ○ ● \* ★ • \* ★ ● ○

|            |                    |               |                |               |               |                                         |
|------------|--------------------|---------------|----------------|---------------|---------------|-----------------------------------------|
| NORMERING: | 1 (i): 1           | 2 (i): 2      | 3 (i): 2       | 4 (i): 3      | 5 (i): 2      | TOTAAL:                                 |
|            | (ii): 2            | (ii): 2       | (ii): 4        | (ii): 3       | (ii): 2       | 38 punten!                              |
|            | (iii): 3           |               | (iii): 2       | (iii): 2      | (iii): 2      |                                         |
|            | (iv): 1            |               | (iv): 2        |               | (iv): 2       | EINDCIJFER:                             |
|            | (v): $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $1 + \frac{1}{4} \times \text{totaal.}$ |

○ ● \* ★ • \* ★ ● ○ • ○ ● \* ★ • \* ★ ● ○ • ○ ● \* ★ • \* ★ ● ○ • ○ ● \* ★ • \* ★ ● ○