

○●✱✱・✱✱●○・○●✱✱・✱✱●○・○●✱✱・✱✱●○・○●✱✱・✱✱●○・○●✱✱・✱✱●○・○●✱✱・✱✱●○・○●✱✱・✱✱●○・○●✱✱・✱✱●○・○●✱✱・✱✱●○

$$\mu(A) \leq \alpha m(A) \quad \text{voor alle } A \in \mathcal{H},$$

(i). Laat zien dat μ σ -eindig is op $\mathcal{H}$.

$$\mu(A) \leq \alpha m(A) \quad \text{voor alle } A \in \mathcal{B}or(\mathbb{R}).$$

(iii). Laat zien dat m_F absoluut-continu is, en vervolgens dat er een $\alpha \in \mathbb{R}_+$ is zó dat

$$m_F(A) \leq \alpha m(A) \quad \text{voor alle } A \in \mathcal{B}or(\mathbb{R}). \quad (*)$$

Opgave 2. Zij $(V, \mathcal{A}, \mu)$ een maatruimte, en laat E een deel van V zijn waarvoor

$$\forall \varepsilon > 0 \exists A, B \in \mathcal{A} : A \subset E \subset B \text{ en } \mu(B \setminus A) < \varepsilon.$$

(i). Laat zien dat er dan ook $A, B \in \mathcal{A}$ zijn met $A \subset E \subset B$ zó dat de ‘schil’ $B \setminus A$ een μ -nulverzameling is.

(ii). Bewijs: er is een *meetbare* functie $f : (V, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}or(\mathbb{R}))$ waarvoor geldt dat $f = 1_E \mu$ -bijna-overal.

(iii). Laat zien dat 1_E zelf meetbaar is zodra de maatruimte $(V, \mathcal{A}, \mu)$ *compleet* is.

Opgave 3. Zij $f, f_1, f_2, \dots$ niet-negatieve, eindige, integreerbare functies op een maatruimte $(V, \mathcal{A}, \mu)$. We stellen eerst twee implicaties aan de orde die *niet* juist zijn.

(i). Laat door middel van een voorbeeld (ook van een metruimte) zien dat

$$f_n \rightarrow f \text{ } \mu\text{-b.o.} \not\Rightarrow \int_V |f_n - f| \, d\mu \rightarrow 0 \quad [n \rightarrow \infty].$$

(ii). Laat door middel van een voorbeeld (ook van een metruimte) zien dat

$$\int_V f_n \, d\mu \rightarrow \int_V f \, d\mu \not\Rightarrow \int_V |f_n - f| \, d\mu \rightarrow 0 \quad [n \rightarrow \infty].$$

(iii). Formuleer de bijna-overal-versie van de GCS.

(iv). Duidelijk is dat $|f_n - f| = f_n \vee f - f_n \wedge f = (f_n + f) - 2(f_n \wedge f)$. Laat nu met behulp hiervan en van (iii) zien dat de volgende implicatie *wel* juist is:

$$\left. \begin{array}{l} f_n \rightarrow f \text{ } \mu\text{-b.o.} \\ \int_V f_n \, d\mu \rightarrow \int_V f \, d\mu \end{array} \right\} \implies \int_V |f_n - f| \, d\mu \rightarrow 0 \quad [n \rightarrow \infty].$$

Opgave 4.

- (i). Laat μ en ν maten zijn op een meetbare ruimte $(V, \mathcal{A})$ zó dat ν absoluut-continu is ten opzichte van μ met dichtheid g . Bewijs dan (in drie of vier stappen) de bekende eigenschap dat voor iedere naar ν integreerbare functie $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ geldt: $\int_V f \, d\nu = \int_V fg \, d\mu$.

We zijn geïnteresseerd in de oneigenlijke Riemann-integraal

$$I_n := \mathcal{R}\text{-}\int_0^n (1 - x/n)^n e^{\frac{1}{2}x} dx$$

voor $n \rightarrow \infty$. Ter bepaling van $I := \lim_{n \rightarrow \infty} I_n$ definiëren we voor $n \in \mathbb{N}$

$$f_n(x) := (1 - x/n)^n 1_{[0,n]}(x) \quad [x \in \mathbb{R}_+],$$

en schrijven we $I_n = \int_{\mathbb{R}_+} f_n \, d\nu$ voor $n \in \mathbb{N}$, waarbij ν een geschikte maat is op de meetbare ruimte $(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}or(\mathbb{R}_+))$.

- (ii). Laat zien dat het laatste inderdaad mogelijk is; geef $\nu(A)$ voor $A \in \mathcal{B}or(\mathbb{R}_+)$ expliciet weer in termen van de Borel-maat m , en beargumenteer kort de overgang van Riemann- naar Lebesgue-integraal.
- (iii). Bepaal $\int_{\mathbb{R}_+} e^{-x} \nu(dx)$, met ν de maat uit (ii).
- (iv). Laat zien dat $f_n(x) \leq e^{-x}$ voor $n \in \mathbb{N}$ en $x \in \mathbb{R}_+$, en toon met behulp hiervan aan dat de limiet I bestaat. Wat is de waarde van I ?

Opgave 5. Zij $f : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$f(x, y) = e^{-(1+x^2)y} \quad [(x, y) \in \mathbb{R}_+^2].$$

- (i). Formuleer de stelling van Fubini voor niet-negatieve functies, en laat zien dat en hoe deze stelling gebruikt kan worden om te bewijzen dat $\int_{\mathbb{R}_+^2} f \, dm_2 = \frac{1}{2}\pi$, met m_2 de Borel-maat.
- (ii). Bepaal met behulp van (i) de Riemann-integraal $\mathcal{R}\text{-}\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-t} \, dt$.

[illegible]

NORMERING:	1 (i): 1	2 (i): 2	3 (i): 2	4 (i): 3	5 (i): 4	TOTAAL:
	(ii): 3	(ii): 2	(ii): 2	(ii): 2	(ii): 3	38 punten!
	(iii): 2	(iii): 2	(iii): 1	(iii): 2		
	(iv): <u>2</u>	<u> </u>	(iv): <u>3</u>	(iv): <u>2</u>	<u> </u>	EINDCIJFER:
	8	6	8	9	7	$1 + \frac{1}{4} \times \text{totaal.}$

○●✱✱・✱✱●○・○●✱✱・✱✱●○・○●✱✱・✱✱●○・○●✱✱・✱✱●○・○●✱✱・✱✱●○・○●✱✱・✱✱●○